物　理　学

I　以下の問いに答えよ．途中経過も含めて解答すること．

図１のように，頂点 A に留め具を備えた質量 M の剛体の台を水平な床の上に置き，床と角度 θ をなす斜面にばね定数 k のばねと質量 m のおもりをとりつける．台に固定された座標系として，斜面に平行で下向きを正とする x 軸を定義し，ばねが自然長である時のおもりの位置を $x=0$，台を支えて静止させた時のばねの自然長からののびを x_0 とする．台の静止状態を保ったまま，ばねをさらに δu だけ伸ばし，時刻 $t=0$ に台およびおもりを静かに放すと，台とおもりは振動を開始する．床に固定された静止座標系として，水平右向きに X 軸，鉛直上向きに Z 軸を定義し，時刻 $t=0$ における台の左下端の頂点 B の位置を $(X,Z)=(0,0)$，時刻 t における頂点 B の位置を $(X,Z)=(U(t),0)$ と表す．また，時刻 t における，台に固定された座標系におけるおもりの位置を $x=x_0+u(t)$ と表す．$u(t)$ および $U(t)$ の２階時間微分をそれぞれ $\ddot{u}(t)$ および $\ddot{U}(t)$ と書く．重力加速度は一様で，大きさは $g(>0)$，向きは鉛直下向きとする．以下では，振動が微小であり，おもりは斜面から離れず，台も床上を水平方向のみに運動する場合を考える．また，斜面や床の摩擦，ばねや留め具の質量は無視できるとする．

（１）$M/m \gg 1$ で, 台が床に対して運動していないと見なせる場合を考える．

（1-1）x_0 の値を，$m,\ k,\ g,\ \theta$ を用いて表せ．

（1-2）おもりの x軸方向の運動方程式を，$u(t),\ \ddot{u}(t),\ m,\ k$ を用いて書け．

（1-3）（1-2）の運動方程式を解き，$u(t)$ を，$\delta u,\ m,\ k,\ t$ を用いて表せ．

（２） M/m が有限である場合を考える．おもりが斜面から受ける垂直抗力の大きさを $T(t)$，台およびおもりがばねから受ける張力の大きさを $F(t)$ とする．

（2-1）$F(t)$ を， m, $u(t)$, g, k, θ を用いて表せ.

（2-2）台の X 方向の運動を記述する運動方程式を，M, $\ddot{U}(t)$, $T(t)$, $F(t)$, θ を用いて書け.

（2-3）(X,Z) 座標系におけるおもりの運動を記述する．おもりの X 方向及び Z 方向の運動方程式を， m, $\ddot{u}(t)$, $\ddot{U}(t)$, $T(t)$, $F(t)$, g, θ の中から必要なものを用いてそれぞれ書け.

（2-4）（2-2）および（2-3）で記述した運動方程式を解いて $u(t)$ の振動の角周波数を求め，M, m, k, θ を用いて表せ.

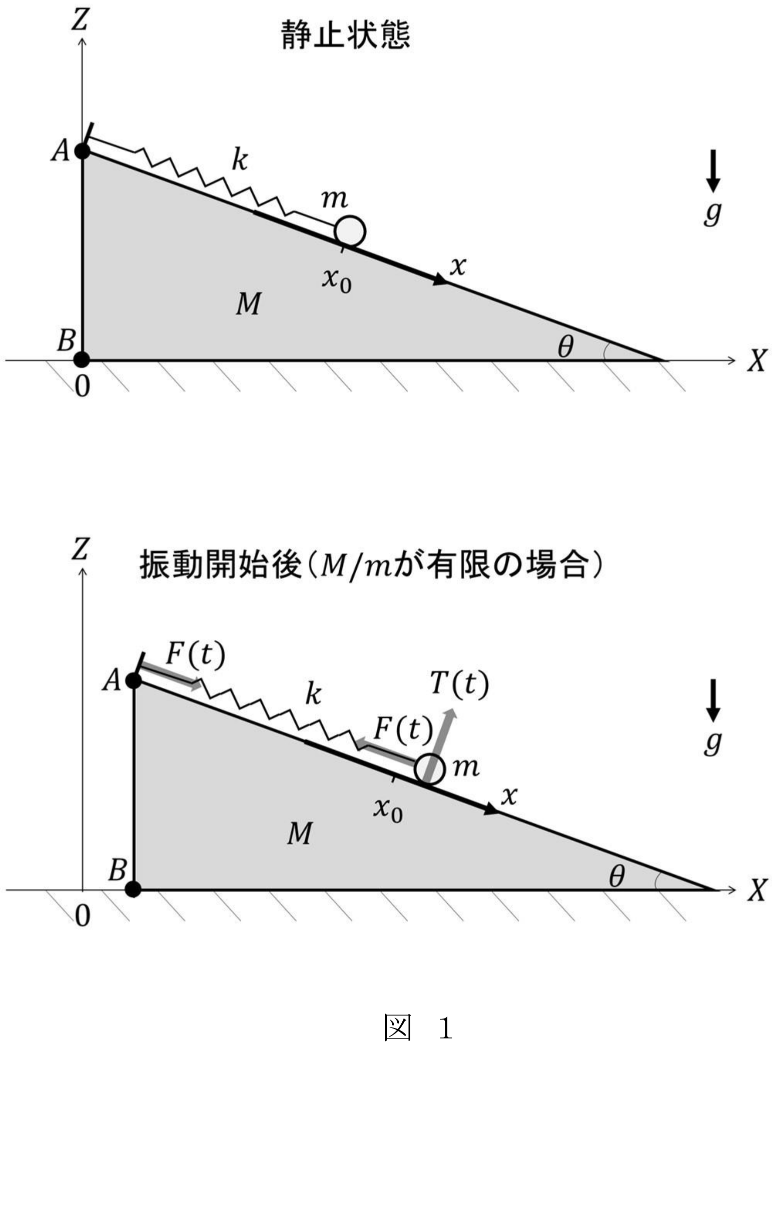

図 1

Ⅱ　以下の問いに答えよ．途中経過も含めて解答すること．真空中の誘電率をε_0とし，$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$d>0$，$d'>0$，$x_B>0$，$q>0$ とする．

（1）　図２のように，真空中の xyz 空間において点 $\mathrm{A}_1(0,d/2,0)$ および点 $\mathrm{A}_2(0,-d/2,0)$ にそれぞれ $q,-q$ の電荷が置かれている．点 $\mathrm{R}(x,y,z)$ における電位 $\phi(x,y,z)$ を求めよ．ただし，無限遠での電位を $\phi=0$ とする．

（2）（１）において $|d|\ll r$ として d の一次までの近似式として電位 ϕ を求めよ．さらに, $p=qd$ を一定とし, $d\to 0$ としたときの電位 $\phi(x,y,z)$ を求めよ．

（3）　（２）で求めた電位は，電気双極子 $\boldsymbol{p}=qd\boldsymbol{e}_y$（ $\boldsymbol{e}_y$ は y 方向の単位ベクトル）によって生じていると見なすことができる．これを用いて，任意の方向の電気双極子 $\boldsymbol{p}$ が原点に置かれた時の点$\mathrm{R}(x,y,z)$ における電位 $\phi(x,y,z)$ を $\boldsymbol{p},\boldsymbol{r},r,\varepsilon_0$ を用いて表せ．ただし，無限遠での電位を $\phi=0$ とする．

（4）　（３）のとき，点 $\mathrm{R}(x,y,z)$ における電場が

$$\boldsymbol{E}(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})}{r^5}\boldsymbol{r}-\frac{\boldsymbol{p}}{r^3}\right]$$

となることを示せ．

（5） $\boldsymbol{p}=p\boldsymbol{e}_y$ のときの（４）の電場の下で，図２の点 $\mathrm{B}_1(x_B,d'/2,0)$ および点 $\mathrm{B}_2(x_B,-d'/2,0)$ にそれぞれ $q,-q$ の電荷が置かれているとする．これらの２つの電荷で構成される電気双極子が電場から受ける合力 $\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}(x_B,d'/2,\ 0)-q\boldsymbol{E}(x_B,-d'/2,0)$ を求めよ．さらに, $p'=qd'$ を一定とし, $d'\to 0$ としたときの $\boldsymbol{F}$ を求めよ．

（6） $\boldsymbol{p}=p\boldsymbol{e}_y$ のときの（４）の電場の下で，図２の点 $\mathrm{C}_1(x_B+d'/2,0,0)$ および点 $\mathrm{C}_2(x_B-d'/2,0,0)$ にそれぞれ$q,-q$の電荷が置かれているとする．それぞれの電荷に加わる力を考え，点 $\mathrm{B}(x_B,0,0)$ に置かれた双極子ベクト

ル $\boldsymbol{p}' = (qd', 0, 0)$ をもつ電気双極子が電場から受ける力の説明として，下記の文章中の２箇所の［　］内の選択肢のうちそれぞれ正しいものを選び，定性的な理由を述べよ．

点 $\mathrm{B}(x_B, 0, 0)$ に置かれた双極子ベクトル $\boldsymbol{p}' = (qd', 0, 0)$ をもつ電気双極子が，$\boldsymbol{p} = p\boldsymbol{e}_y$ のときの（４）の電場から受ける合力は［$+x$ 方向，$-x$ 方向，$+y$ 方向，$-y$ 方向，ゼロ］である．点 B に関する力のモーメントによる電気双極子の回転は図３で［時計回り，反時計回り，なし］である．

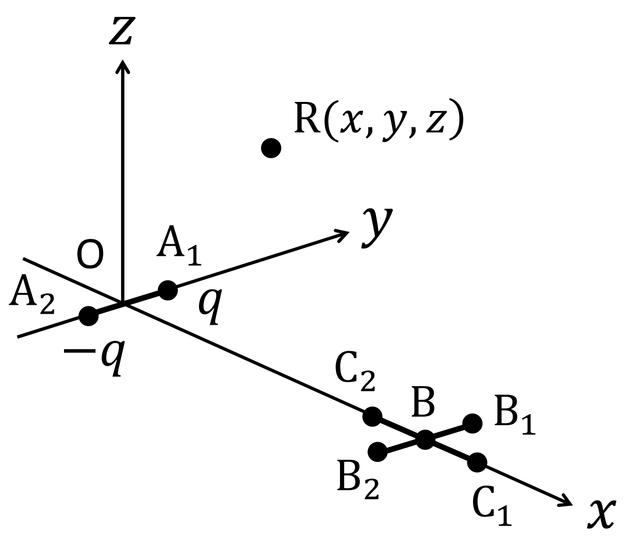

図　2

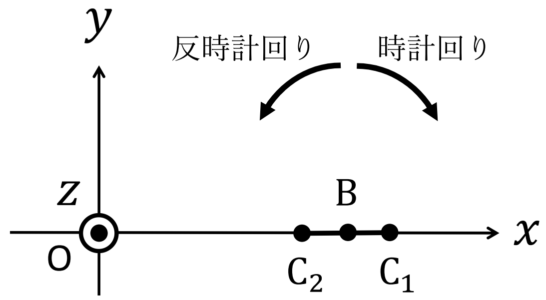

図　3

Ⅲ　以下の問いに答えよ．途中経過も含めて解答すること．

　真空の空箱内はその温度に応じた輻射に満ちており，質量を持たない光子気体と見なすことができる．光子気体の温度を T，圧力を P，体積を V，内部エネルギーを U，エントロピーを S とし，状態量 X の微小変化量を $\mathrm{d}X$ と表す．系が吸収する熱量を δQ とする．ここでは準静的過程を考え，以下の関係が成り立つとする．

$$\mathrm{d}U = \delta Q - P\mathrm{d}V = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V$$

（1）　ヘルムホルツの自由エネルギー $F = U - TS$ から，下記のマクスウェルの関係式を導け．

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

（2）　下記の関係式を導け．

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P$$

　光子気体の圧力 P はその内部エネルギー密度 $u\,(= U/V)$ を用いて，$P = u/3$ と表すことができる．ここで，P と u は体積によらない温度 T だけの関数である．

（3）　$u = aT^4$ が成り立つことを示せ．ここで a は定数とする．

（4）　内部エネルギーの微小変化量 $\mathrm{d}U$ を，a，T，$\mathrm{d}T$，V，$\mathrm{d}V$ を用いて表せ．

（5）　断熱過程において，$VT^3 =$ 一定 が成り立つことを示せ．

（6）　光子気体を使って，図４のように準静的に変化させるカルノーサイクルを考える．

状態 A→状態 B：体積 V_A，温度 T_1 から体積 V_B，温度 T_1 まで等温膨張

状態 B→状態 C：体積 V_B，温度 T_1 から体積 V_C，温度 T_2 まで断熱膨張

状態 C→状態 D：体積 V_C，温度 T_2 から体積 V_D，温度 T_2 まで等温圧縮
状態 D→状態 A：体積 V_D，温度 T_2 から体積 V_A，温度 T_1 まで断熱圧縮

状態 A→状態 B で系が吸収した熱量 ΔQ_1，状態 C→状態 D で系が放出した熱量 ΔQ_2 をそれぞれ求め，カルノーサイクルの熱効率 $\eta\,(= 1 - \Delta Q_2/\Delta Q_1)$ が,

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

と表せることを示せ.

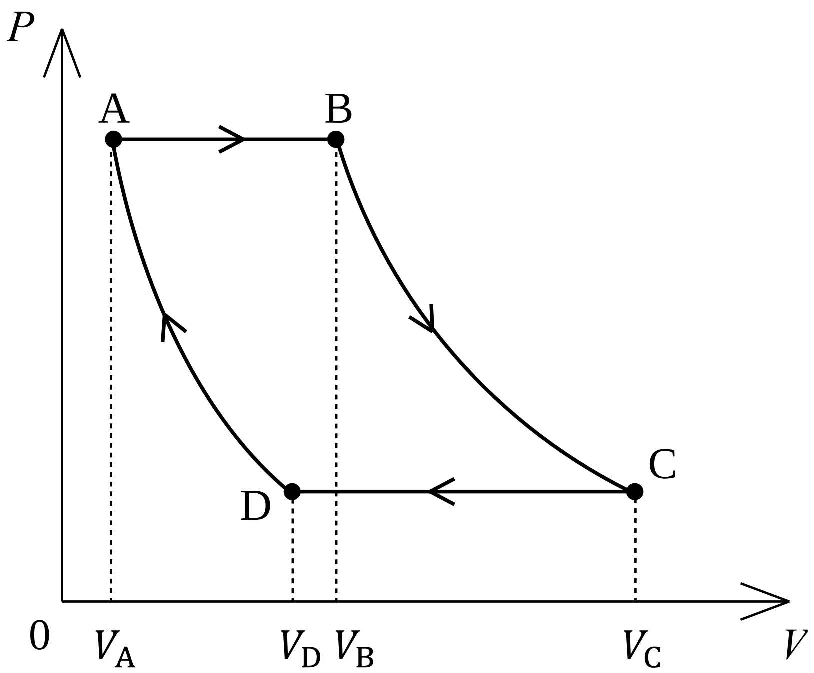

図 4