数　学

I　以下の問いに答えよ．途中経過も含めて解答すること．

（1）　複素平面 z 上の $z = x + iy$（x，y は実数，i は虚数単位）が $W = f(z)$ によって複素平面 W 上に写像される．
$f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ であるとき，複素平面 z 上の半径 1 の円 $x^2 + y^2 = 1$ は複素平面 W 上にどのような図形に写像されるか答えよ．

（2）　x, y, z 3 次元空間の $z = 0$ 平面上において，図 1 に示すような $(0, 2, 0)$ を中心とする半径 1 の円を考える．この円を x 軸の周りで 1 回転させてできるドーナツ型の立体の体積と表面積を求めよ．

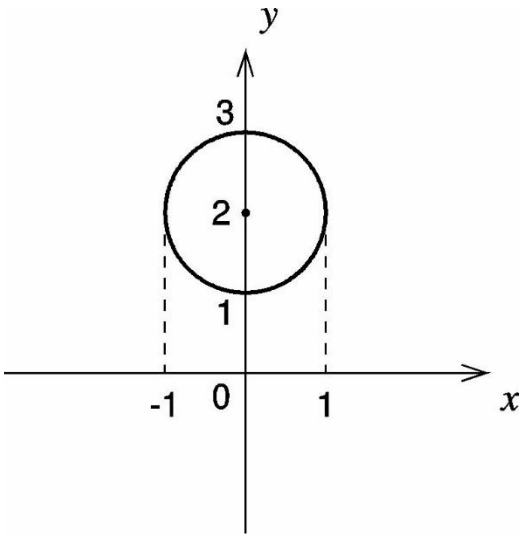

図 1

（3）　次の微分方程式を，ベルヌーイの微分方程式を利用して解くことを考える．

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 4y\cos x = y^5 \sin 2x \qquad \text{（A）}$$

ベルヌーイの微分方程式 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - P(x)y = Q(x)y^n$ は，$u = y^\alpha$ と置くことで一階線形微分方程式 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - R(x)u = S(x)$ に変形することができる．以下の問いに答えよ．なお，$y = 0$ の解は考えなくて良い．

（3-1）（A）を一階線形微分方程式に変形するための α の値と，変形後の式の $R(x)$ と $S(x)$ を求めよ．

（3-2）（3-1）で求めた方程式において $S(x) = 0$ とした時の u の一般解を求めよ．

（3-3）（A）の一般解を求めよ．

（４） 東京において，6〜8 月の降水日のうち，50 mm/日を超えた日数と超えなかった日数を，1980 年代と 2000 年代の 2 期間に分けて調べたところ，表 1 のような結果となった．年代と，降水日数に対する大雨日数（50 mm/日を超える日数）の割合の間に関連が認められるか？ 帰無仮説を「年代と，降水日数に対する大雨日数の割合の間に関連はない」として検定することを考える．なお，観測度数を O，理論度数を E と置いた場合， χ^2 値は次の式で求められる．

$$\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E}$$

（4-1）表 1 のア），イ），ウ），エ）の観測度数に対応する理論度数を有効数字 2 桁でそれぞれ求めよ．なお，計算の途中でも乗算と除算は有効数字 2 桁で行って良いこととする．乗算については下記の参考情報を用いて良い．

（参考）$360 \times 37 = 13320 \approx 13000$，$330 \times 37 = 12210 \approx 12000$，

$360 \times 660 = 237600 \approx 240000$，$330 \times 660 = 217800 \approx 220000$．

（4-2）χ^2 値を有効数字 2 桁で求めよ．なお，計算の途中でも乗算と除算は有効数字 2 桁で行って良いこととする．

（4-3）帰無仮説が有意水準 5% において棄却されるか否かを，表 2 の χ^2 分布表を用いて検定せよ．その際，検定に用いた自由度 φ の値を明記すること．

表１

	1980 年代	2000 年代	計
50 mm/日を超えた降水日数	ア）　15	イ）　22	37
50 mm/日以下の降水日数	ウ）　349	エ）　310	659
計	364	332	696

表２： χ^2 分布表

φ を自由度として上側確率が α となる点

φ	α									
	0.99	0.95	0.90	0.75	0.50	0.25	0.10	0.05	0.01	0.005
1	0.00	0.00	0.02	0.10	0.46	1.32	2.71	3.84	6.63	7.88
2	0.02	0.10	0.21	0.58	1.39	2.77	4.61	5.99	9.21	10.60
3	0.12	0.35	0.58	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	11.34	12.84
4	0.30	0.71	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	13.28	14.86
5	0.55	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.07	15.09	16.75

Ⅱ　行列 $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$ に関する以下の問いに答えよ．途中経過も含めて解答すること．

（１）　固有値 λ_1 , λ_2（λ_2 は 2 重解），固有ベクトル $\overrightarrow{p_1}$, $\overrightarrow{p_2}$（$\overrightarrow{p_2}$ は 2 重解に対応），および広義固有ベクトル $\overrightarrow{p_3}$ を求めよ．広義固有ベクトルは，$(A-\lambda_2 E)\overrightarrow{p_3}=\overrightarrow{p_2}$ で表される．ただし，E は単位行列である．

（２）　ジョルダン標準形 $J=P^{-1}AP$ を求めよ．ただし，$P=(\overrightarrow{p_1},\overrightarrow{p_2},\overrightarrow{p_3})$ とする．

（３）　A^n を求めよ．ただし，n は自然数である．