物　理　学

I　以下の問いに答えよ．途中経過も含めて解答すること．

自転する地球上に静止した観測者から見た，質点の運動を考える．自転の角速度ベクトル$\boldsymbol{\omega}$は一定であり，その大きさを$\omega = |\boldsymbol{\omega}|$とする．質点の運動する範囲は観測者の近傍とし，局所的なデカルト座標系（地表のある地点に固定された原点と座標軸を持つ直交座標系）を用いる．この座標系では，万有引力のほかに自転に伴う遠心力とコリオリ力が働く．従って，遠心力の効果を重力$\boldsymbol{g}$に含めると，質点（単位質量を持つとする）の運動方程式は，一般に

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g} + 2\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega} \tag{A}$$

と書ける．ここで，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{v}$はそれぞれ局所座標系における質点の加速度と速度を表し，空気抵抗は無視できるものとする．今，図１のように，z軸を鉛直上向き（$-\boldsymbol{g}$の向き，$z = 0$ が地表），y軸を自転の向き（東向き），x軸を南向きにとり，質点の位置を(x, y, z)で表す．質点は北半球にあるとし，z軸と赤道面がなす角をβとおく．以下では，質点の運動する範囲では重力$\boldsymbol{g}$は一定であるとしてよい．ただし，重力の大きさを$g = |\boldsymbol{g}|$とする．

（１）　$\boldsymbol{\omega}$のx，y，z成分をω，βを用いて表せ．

（２）　式（A）で与えられる加速度の各成分$\ddot{x}$，$\ddot{y}$，$\ddot{z}$を，ω，β，$\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{z}$，gのうち必要なものを用いて表せ．変数の上の・は時間に関する微分を表す．

（３）　時刻$t = 0$に地表からの高さが$h(>0)$の点$(x, y, z) = (0, 0, h)$において，x方向に初速v_xで質点を投げた．このとき，式（A）の右辺第２項が右辺第１項に比べて十分小さいことを利用して，$z = 0$に到達した時の水平位置x_c，y_cを以下のように近似的に求めることができる．

(3-1) $\omega = 0$の時，$z = 0$に到達するまでの軌道$(x(t), y(t), z(t))$を式で表せ．

(3-2)　$\omega \neq 0$の時，（3-1）で得た解を（２）で求めた運動方程式の右辺に代入することで，ωの一次の項まで考慮した運動方程式を書き下せ．

（3-3）（3-2）の運動方程式を解き，質点が$z=0$に到達するのに要した時間t_cを求めよ．また，x_c，y_cを，ω，β，g，v_x，t_cのうち必要なものを用いて表せ．

（3-4） $\beta = 45°$， $h = 10\ \mathrm{m}$，$g = 10\ \ \mathrm{m/s^2}$の時，$z = 0$に到達した時の位置が西（$y_c < 0$）にずれるv_x（m/s）の範囲を有効数字 1 桁で求めよ．

（3-5）（3-4）でv_xが小さい時は東にずれ，v_xが大きくなると西にずれる理由を，質点の運動方向とコリオリ力の向きの関係に着目して 150 字程度で説明せよ．

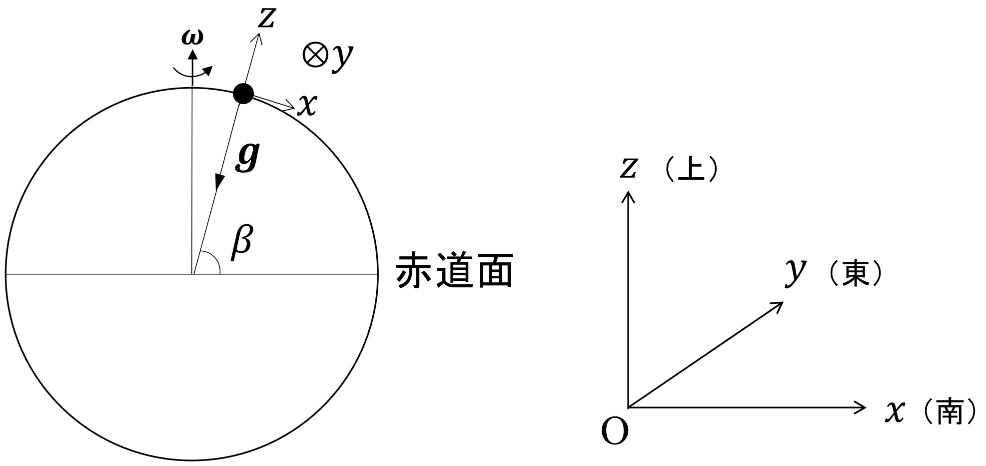

図　1

Ⅱ　以下の問いに答えよ．途中経過も含めて解答すること．

電磁気学の基礎方程式であるマクスウェル方程式は以下で与えられる．

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0, \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{X})$$

ただし，t，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{j}$，ρはそれぞれ時間，電場，磁束密度，電流密度，電荷密度を表す．また，ε_0，μ_0はそれぞれ真空の誘電率および透磁率である．ここで，$\boldsymbol{X}$はマクスウェルによって導入された変位電流を表す．変位電流は十分にゆっくりとした現象（準定常電流）では無視することができる．

（1） 図２のように，半径 a の円に沿って，定常で一様な電流 I が流れている場合を考える．ただし，円は$x-y$平面上にあるとし，円の中心は z 軸上にあるとする．このとき，前述のように，変位電流は無視することができる．

（1-1）次の文章中の空欄ア～エにあてはまる式または記号を，μ_0，a，x，y，z，I，dlのうち，必要なものを用いて示せ．

円の中心軸上（z軸上）の磁束密度$\boldsymbol{B}(z)$を円の中心からの距離 z の関数として求める．ビオ・サバールの法則より，微小な電流要素$Id\boldsymbol{l}$（$d\boldsymbol{l}$は微小線素を表す）によって$\boldsymbol{r}$だけ離れた位置に作られる微小な磁束密度$d\boldsymbol{B}$は

$$d\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}$$

と表される．ここで，図２右に示す$y=0$の断面を考える．電流要素$Id\boldsymbol{l}$から点$(0,0,z)$までの距離$|\boldsymbol{r}|$は $\boxed{\text{ア}}$ なので，$Id\boldsymbol{l}$が点$(0,0,z)$の位置に作る$d\boldsymbol{B}$の大きさ$|d\boldsymbol{B}|$は，$dl=|d\boldsymbol{l}|$を用いて $\boxed{\text{イ}}$ と表される．この電流要素を半径aの円に沿って一周積分すると，対称性から$\boldsymbol{B}(z)$の $\boxed{\text{ウ}}$ 成分以外は 0 となる．このとき，$\boldsymbol{B}(z)$の $\boxed{\text{ウ}}$ 成分は $\boxed{\text{エ}}$ となる．

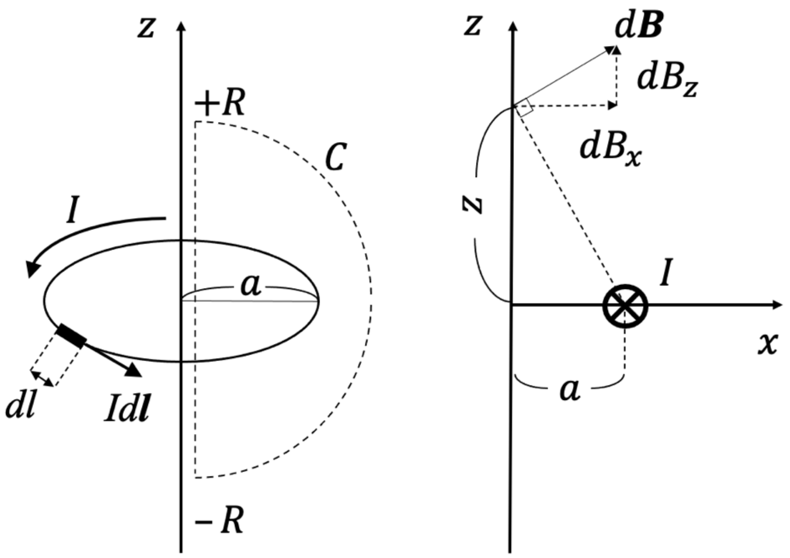

図 2

（1-2）（1-1）で求めた磁束密度を，図２左の閉曲線 C （中心軸を $z=-R$ から $+R$ まで行き，半径 R の半円に沿って$z=-R$ に戻る．ただし， $R\to\infty$ の極限を考える）に沿って積分し，

$$\int_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s}=\mu_0 I$$

となることを示せ．ただし，$d\boldsymbol{s}$はCに沿った微小線素である．必要であれば, $R\to\infty$ の極限において半径 R の半円に沿った $+R$ から $-R$ までの積分は無視できるとしてよい.

（２） 次に，変位電流を無視することができない場合について考える.

（2-1）変位電流$\boldsymbol{X}$を無視したアンペールの法則

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}$$

は，電流の発散がある（$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}\neq 0$）場合には成り立たないことを示せ.

（2-2）変位電流$\boldsymbol{X}$を

$$\boldsymbol{X}=\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

と選ぶと，電流の発散がある場合にも$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\mu_0(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{X})$が成り立つことを示せ．ただし，電荷密度と電流密度の関係として，連続の式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}$$

が成り立つことを用いてよい.

（2-3）真空中をx方向に伝搬する波数$k\ (>0)$，角周波数$\omega\ (>0)$の電磁波として，以下の形の解を仮定する.

$$E_z=E_0\sin(kx-\omega t),\quad B_y=-B_0\sin(kx-\omega t)$$

ここで，E_zは$\boldsymbol{E}$のz成分，B_yは$\boldsymbol{B}$のy成分を表し，それ以外の成分は 0 とする．また，E_0とB_0は定数である．このとき，電磁波の位相速度が$1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$となることを示せ.

Ⅲ　以下の問いに答えよ．途中経過も含めて解答すること．

理想気体の内部エネルギーUは，気体を構成する分子の自由度がfであるとき，物質量（モル数）Nおよび温度Tを用いて

$$U = \frac{1}{2} f N R T \qquad \text{(A)}$$

によって与えられる．また，理想気体の状態方程式は，圧力Pおよび体積Vを用いて

$$PV = NRT \qquad \text{(B)}$$

と表される．ここで，Rは気体定数である．以下で考える状態変化は全て準静的であると仮定せよ．

（１）　気体を構成する分子の自由度がfである理想気体を考える．

(1-1) 定積変化（体積Vが一定）において，定積モル比熱（1 モルあたりの熱容量）c_Vが

$$c_V = \frac{1}{2} f R$$

と表されることを示せ．ただし，準静的過程における定積モル比熱はエントロピーSを用いて

$$c_V = \frac{T}{N} \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{V,N}$$

と与えられることを用いてもよい．

(1-2) 断熱変化（エントロピーSが一定）において，圧力Pおよび体積Vの間に関係式

$$PV^{(f+2)/f} = 一定$$

が成り立つことを示せ．

（２）　シリンダーの中にピストンで閉じ込められた単原子分子理想気体（自由度$f = 3$）を考える．ただし，シリンダーおよびピストンを介した熱の出入りは無視してよい．初期の気体の圧力はP_1，体積はV_1とする．

（2-1）ピストンを固定した状態でシリンダー内部の気体に熱量$Q(>0)$を加えて加熱したところ，気体の圧力がP_2となった．このときの圧力P_2を，P_1および$q = Q/(P_1V_1)$を用いて表せ.

（2-2）（2-1）の状態から，シリンダー内部の気体の圧力が元の値P_1になるまで断熱膨張させた．この過程で気体が外部に対して行った仕事をWとする．このとき，$w = W/(P_1V_1)$を，（2-1）のqを用いて表せ.

（３） エントロピーSが内部エネルギーU，体積V，および物質量（モル数）Nの関数として

$$S(U,V,N) = \frac{N}{N_0}S_0 + NR\ln\left[\left(\frac{U}{U_0}\right)^{f/2}\left(\frac{V}{V_0}\right)\left(\frac{N}{N_0}\right)^{-(f+2)/2}\right]$$

によって与えられる気体を考える．ここで，$\ln[x]$はxの自然対数を表す．なお，基準となるエントロピー，内部エネルギー，体積，物質量をそれぞれS_0，U_0，V_0，N_0とした．以下の式

$$dS = \frac{1}{T}\,dU + \frac{P}{T}\,dV - \frac{\mu}{T}\,dN$$

によってこの気体の温度T，圧力P，および化学ポテンシャルμが定義される．このことを用いて，この気体が式（A）および式（B）を満たす理想気体であることを示せ.