数　学

I　以下の問いに答えよ．途中経過も含めて解答すること．

（１）　（　）内に与えた条件を満たす次の微分方程式の特解を求めよ．

（1-1）$\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 10y = 0 \quad \left(x = 0 \text{ で } y = 1,\ \dfrac{dy}{dx} = 4\right)$

（1-2）$\dfrac{d^2y}{dx^2} - 6\dfrac{dy}{dx} + 9y = 0 \quad \left(x = 0 \text{ で } y = 1,\ \dfrac{dy}{dx} = 4\right)$

（２）　行列$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -2 \\ 1 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$に関する以下の問いに答えよ．

（2-1）Aの固有値λを求めよ．

（2-2）Iを 3 行 3 列の単位行列とし，$B = A - \lambda I$とする．B^nを計算せよ．また，A^nを求めよ．ただし，nは自然数である．

（３）　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx \ (a > 0)$　を求めよ．

（４）　N 種類の賞品が，毎回すべて同じ確率 $1/N$ で当たるくじがある．

（4-1）n 種類 $(n < N)$ の賞品を持っている人がくじをひくとき，まだ持っていない賞品が k 回目にはじめて当たる確率を求めよ．また，n 種類の賞品を持っている人が，まだ持っていない種類の賞品が当たるまでにくじをひく回数の期待値を n と N を用いて表せ．

（4-2）賞品を持っていない人が，くじをひきはじめてから N 種類すべての

賞品が当たるまでくじをひき続ける．くじをひく回数の期待値を E とするとき，

$$\log(N+1) \leq \frac{E}{N} \leq \log N + 1$$

となることを示せ.

Ⅱ　(x, y, z)を直線直交座標系の座標とする．なめらかな曲面Sに囲まれた領域をVとするとき，ベクトル$\boldsymbol{A}(x, y, z)$について

$$\iiint_V \mathrm{div}\boldsymbol{A}dV = \iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS$$

が成り立つ．ここで，$\boldsymbol{n}$はS上の外向き単位法線ベクトルである．$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$（$x_0, y_0, z_0$は定数）であり，$\Delta$はラプラシアン，$\partial/\partial n$は法線方向の微分を表す．2 つの関数$\phi(x, y, z)$，$\psi(x, y, z)$は 2 階導関数まで連続であるとする．以下の問いに答えよ．途中経過も含めて解答すること．

（1）　$(x, y, z) \neq (x_0, y_0, z_0)$で

$$\phi = \frac{1}{r}$$

とするとき，$\Delta\phi = 0$であることを示せ.

（2）　$\boldsymbol{A} = (x^3, y^3, z^3)$とし，原点を中心とする半径$a$の球の表面$S$について

$$\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS$$

を求めよ.

（3）　$\phi(x, y, z)$，$\psi(x, y, z)$について

$$\iint_S \left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)dS = \iiint_V (\phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi)dV$$

であることを示せ.

（4）　V内の点(x_0, y_0, z_0)において

$$\psi(x_0, y_0, z_0) = -\frac{1}{4\pi}\iiint_V \frac{1}{r}\Delta\psi dV + \frac{1}{4\pi}\iint_S \left[\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dS$$

であることを示せ.