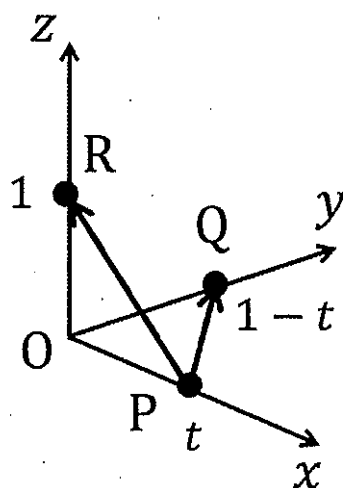


数 学

I 以下の問いに答えよ。途中経過も含めて解答すること。

- (1) (x, y, z) 空間で $O(0, 0, 0)$, $P(t, 0, 0)$, $Q(0, 1-t, 0)$, $R(0, 0, 1)$ が与えられているとき、以下の問いに答えよ。ただし、 $0 < t < 1$ とする。



- (1-1) 2つのベクトル \overrightarrow{PQ} , \overrightarrow{PR} の内積 (スカラー積) $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}$ を求めよ。また、外積 (ベクトル積) $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ を成分表示せよ。
- (1-2) $\triangle PQR$ の面積を t の関数として表せ。また、面積が最小となるときの t の値とその面積を求めよ。
- (2) 次の関数 $f(x)$ の n 階微分を求めよ。ただし、 n は自然数である。

$$f(x) = \cos^4 x$$

- (3) 次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + 4y = x^2$$

II m 次の正方行列について、以下の問いに答えよ。途中経過も含めて解答すること。

(1) $m = 3$ の場合を考え、

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix}$$

とする。行列 $D = P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P と行列 D の組を一つ求めよ。ただし、 a, b, c はいずれも実数で、 $c > 0$ である。

(2) m が奇数のとき、 m 次の実正方行列の固有値の中には実数のものが少なくとも一つあることを示せ。

(3) $B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \end{pmatrix}$ とする。以下では、 I は3次の単位行列、 n は

自然数である。

(3-1) 行列 B の固有値をすべて求めよ。

(3-2) 適当な行列 Q を用いて $C = Q^{-1}BQ$ とし、行列 C が (1) の行列 A の形になるようにする。実数 a, b, c の値を求めよ。

(3-3) (3-2) で求めた行列 C を用いて

$$I + \frac{2\pi}{n}C = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2\pi}{n} & 0 & 0 \\ 0 & r \cos \theta & -r \sin \theta \\ 0 & r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

とするとき、 r^2 と $\tan \theta$ を n で表せ。

(3-4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(I + \frac{2\pi}{n}B \right)^n$ を求めよ。