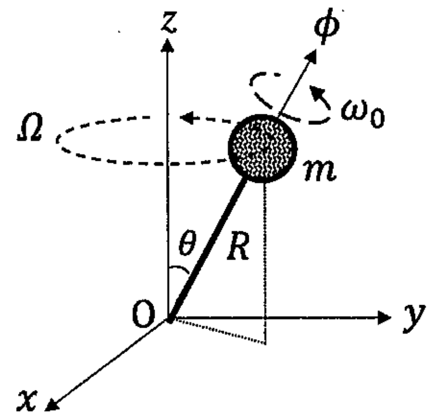
物　理　学

【第３問】

地面を(x,y)平面として重力加速度gが$-z$方向に働く座標系(x,y,z)で，質量mの均質剛体球の中心を，質量の無視できる長さRの軸の上端に固定したコマをまわした．コマは軸（これをϕ軸とする．下図参照）のまわりに一定の角速度ω_0で高速回転しながら，コマの下端が原点Oから動かずに，z軸からθ傾いた状態でz軸のまわりを一定の角速度Ωでゆっくりまわっている．このコマの運動を，コマの角運動量ベクトル$\boldsymbol{L}$とコマに働く力のモーメント$\boldsymbol{N}$の観点から考える．なお，以下の問いでは，コマの重心$\boldsymbol{r} = \left(x(t), y(t), z(t)\right)$，剛体球の重心を通る軸まわりの慣性モーメント$I_\phi$，$z$軸まわりの慣性モーメント$I_z$，コマに働く重力の合力$\boldsymbol{F}_g$，$\phi$軸方向の単位ベクトル$\boldsymbol{e}_\phi$，$z$軸方向の単位ベクトル$\boldsymbol{e}_z$とし，途中経過も含めて解答すること．



（1） 下の$\boxed{ア}$～$\boxed{シ}$に当てはまるベクトル成分を$x(t)$，$y(t)$，$z(t)$，g，m，ω_0，I_ϕ，R，および数字を用いて表せ．

コマに働く重力の合力は$\boldsymbol{F}_g = \left(\boxed{ア}, \boxed{イ}, \boxed{ウ}\right)$である．また，$\phi$軸方向の単位ベクトルは$\boldsymbol{e}_\phi = \left(\boxed{エ}/R, \boxed{オ}/R, \boxed{カ}/R\right)$であり，$z$軸方向の単位ベクトルは$\boldsymbol{e}_z = \left(\boxed{キ}, \boxed{ク}, \boxed{ケ}\right)$である．コマの全角速度ベクトルは$\boldsymbol{\omega} = \omega_0\boldsymbol{e}_\phi + \Omega\boldsymbol{e}_z$であり，全角運動量ベクトルは$\boldsymbol{L} = \omega_0 I_\phi \boldsymbol{e}_\phi + \Omega I_z \boldsymbol{e}_z$である．ここで，コマが高速回転して$\Omega \ll \omega_0$が成り立

つ場合，コマの角速度ベクトルは$\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \boldsymbol{e}_\phi$と近似でき，さらに，$\Omega I_z \ll \omega_0 I_\phi$が成り立つ場合，$\boldsymbol{L}$の方向は$\boldsymbol{\omega}$の方向と一致すると近似できる．このとき，$\boldsymbol{L} = (\boxed{\text{コ}}, \boxed{\text{サ}}, \boxed{\text{シ}})$ となる．

（２） I_zをI_ϕ，m，R，θを用いて表せ．

（３） 以下の問いに答えよ．

(3-1) コマに働く力の原点まわりのモーメント$\boldsymbol{N}$を$\boldsymbol{r}$と$\boldsymbol{F}_g$を用いて表し，$\boldsymbol{N} = (-mgy(t), mgx(t), 0)$となることを示せ．

(3-2) $|\boldsymbol{N}|$を，$|\boldsymbol{r}|$，$|\boldsymbol{F}_g|$，θを用いて表せ．

(3-3) ベクトル$\boldsymbol{F}_g$，$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{N}$を，z軸と成す角がわかるように図示せよ．言葉で補足してよい．

（４） 回転するコマの運動は方程式$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{N}$に従う．$\boldsymbol{L}$の方向が$\boldsymbol{\omega}$の方向と一致する近似の下で，（１）および（３）の結果を利用して，以下の問いに答えよ．

(4-1) 方程式のz成分を書き下せ．これを用いてθが時間変化しないことを示せ．

(4-2) コマがz軸のまわりを円運動することを示し，その角速度Ωをω_0の関数として表せ．

物　理　学

【第４問】

直交（デカルト）座標系の原点Oから十分離れた点P (x, y, z) において，以下のように表される時間変化しないベクトル場 $\vec{A}$ を考える．

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \left(A_x, A_y, A_z\right) \\ &= \left(-\frac{ay}{|\mathrm{OP}|^3}, \frac{ax}{|\mathrm{OP}|^3}, 0\right)\end{aligned}$$

ここで， a は正の定数，$|\mathrm{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とする． $\vec{A}$ が，この空間の磁束密度 $\vec{B}$ のベクトルポテンシャルであるとき，$\vec{B}$ は以下のように表せる．

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \left(B_x, B_y, B_z\right) \\ &= \left(\frac{3axz}{|\mathrm{OP}|^5}, \frac{3ayz}{|\mathrm{OP}|^5}, \frac{3az^2}{|\mathrm{OP}|^5} - \frac{a}{|\mathrm{OP}|^3}\right)\end{aligned}$$

ただし，この空間に静止した電荷は存在しないものとする．

（１） 一般的な磁束密度 $\vec{B}$ とベクトルポテンシャル $\vec{A}$ の関係として，B_x, B_y, B_z を A_x, A_y, A_z の空間微分 $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ を用いてそれぞれ表せ．

（２） $y = 0$ の z-x 平面において，$|\vec{A}|$ の等値線を破線で，磁束線を実線と矢印で描いた図として正しいものを，$|\vec{A}|$ と $\vec{B}$ の関数形を参考にして，図１の（ア）から（エ）より選べ．

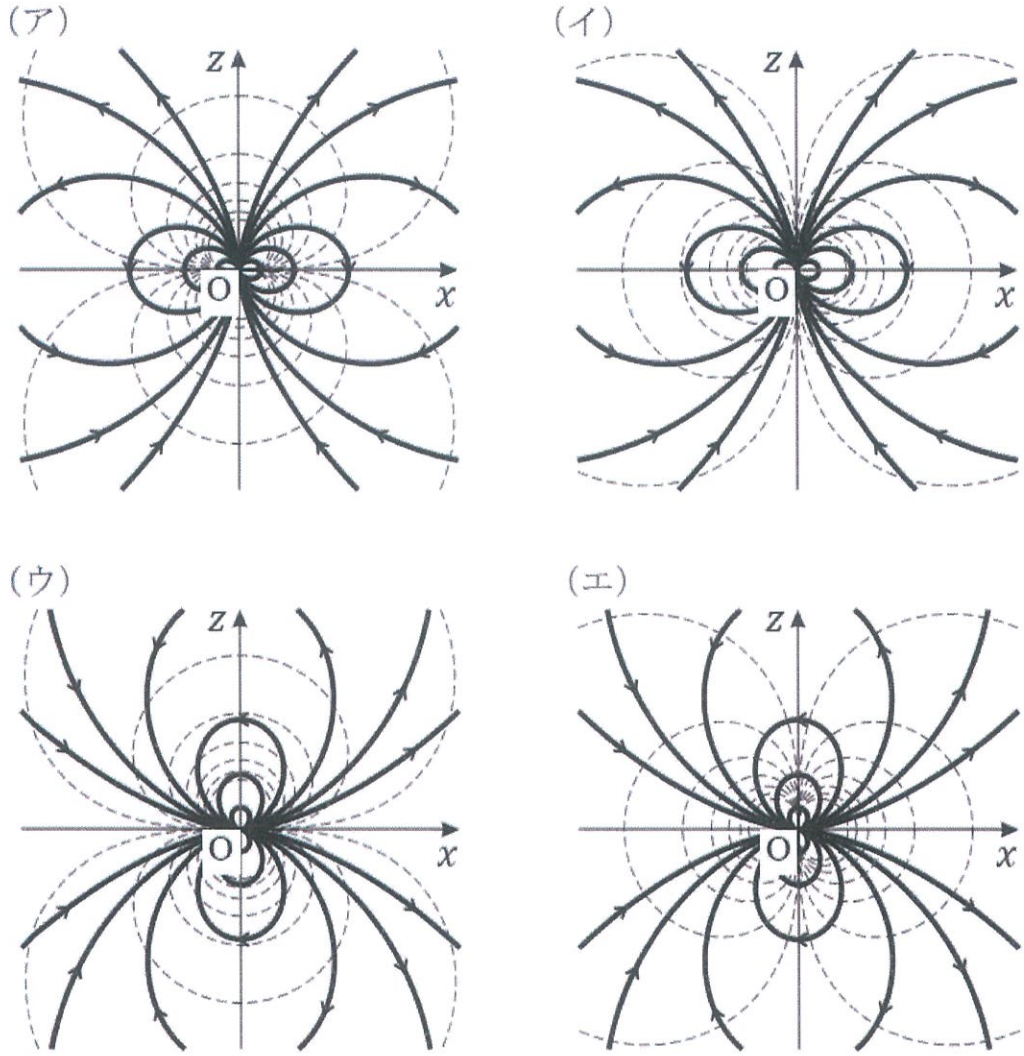


図 1

（3） 以下の文中の $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{エ}}$ に入る適切な語句を，選択肢よりそれぞれ一つ選べ.

「$\vec{B}$ は，原点Oにある $\boxed{\text{ア}}$ 方向の $\boxed{\text{イ}}$ がつくる磁束密度である．この $\boxed{\text{イ}}$ は，$\boxed{\text{ア}}$ 方向に右ネジを進ませる回転方向の，$z=0$ の x-y 平面内に存在する $|\mathrm{OP}|$ に対して十分小さい $\boxed{\text{ウ}}$ ループと等価であり，その大きさは $\boxed{\text{ウ}}$ ループの面積と $\boxed{\text{ウ}}$ の大きさの $\boxed{\text{エ}}$ に比例する.」

選択肢：
x 軸正 ／ x 軸負 ／ z 軸正 ／ z 軸負 ／ 磁荷 ／ 磁気モーメント ／ 電流 ／ 磁束線 ／ 和 ／ 積 ／ 二乗和

（4） この空間中を，図２のように，x-y 平面に無限の広がりをもち，厚さと質量の無視できる電気伝導度 σ の導体板が速度 $\vec{v}=(0,0,v)$ で運動しているとする．ただし v は正の値で，光の速さに比べて十分小さいものとする．また，ある時刻における導体板の z 方向の位置を z' とする．このとき，導体面には z 軸を中心とする同心円上を流れる電流が誘導される．
以下の問いに答えよ．途中経過も含めて解答すること．

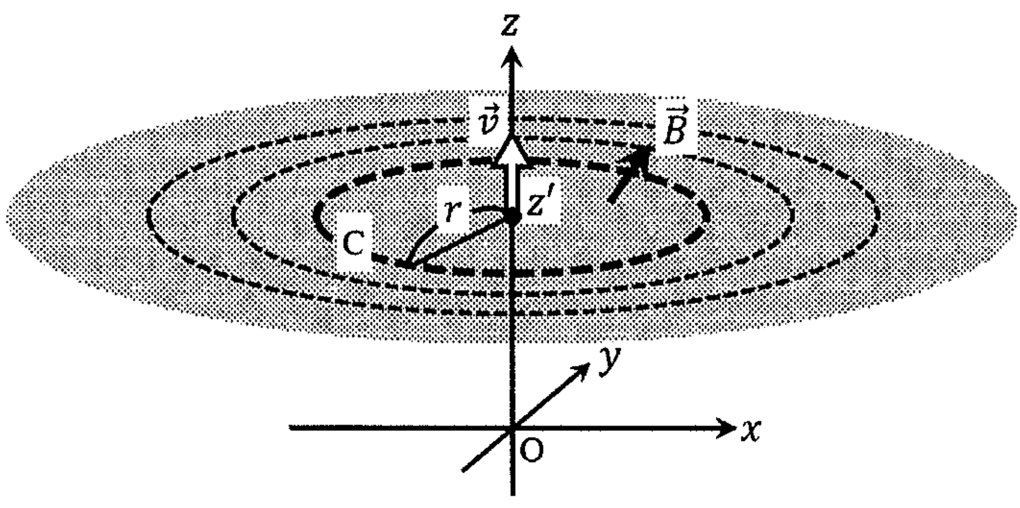


図２

(4-1) 導体板中の単位電荷が受けるローレンツ力 $\overrightarrow{F_e}$ を a, x, y, z' および v を用いて表せ.

(4-2) z 軸を中心とする半径 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ の円周 C に生じる誘導起電力 $\varepsilon(r)$ を a, r, z' および v を用いて表せ.

(4-3) 導体板全体に誘導される電流による単位時間当たりの発熱量を ΔQ, v を一定に保つために必要な z 方向の力の大きさを F と表すとき, ΔQ と F の間の関係式を a, σ, z' および v の中から適切な変数を用いて表せ.

(4-4)

$$\Delta Q=\int_0^\infty \frac{\varepsilon^2(r)}{\frac{2\pi r}{\sigma}}dr$$

であることを使って (4-3) の F を a, σ, z' および v を用いて表せ. 必要に応じて, 以下の積分のいずれかを用いて良い.

$$\int_0^\infty \frac{u^5}{(u^2+s)^5}du=\frac{1}{24s^2}$$

$$\int_0^\infty \frac{u^3}{(u^2+s)^5}du=\frac{1}{24s^3}$$

$$\int_0^\infty \frac{u}{(u^2+s)^5}du=\frac{1}{8s^4}$$

物　理　学　／　化　学

【第５問】

気体の音速 α は，一般に，気体の圧力をP，密度（単位体積当たりの質量）をρ，比体積をv（$= 1/\rho$）として，以下の式で表される．

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{ad}} = \sqrt{-v^2\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_{ad}} \qquad \text{(A)}$$

添え字adは，断熱条件で微分を行うことを意味する．$-v(\partial P/\partial v)_{ad}$は断熱体積弾性率で，正の値である．

ここでは，以下の状態方程式を満たす気体を考える．

$$Pv = RT \qquad \text{(B)}$$

Tは温度，Rは定数とする．この気体単位質量当たりの定積比熱をc_v，定圧比熱をc_pとし，ともに定数とする．

（1） 状態方程式（B）を満たすこの気体について，以下の問いに答えよ．必要ならば，以下の熱力学関数の全微分式を用いてよい．ただし，sは単位質量当たりのエントロピーで，熱力学関数はすべて，単位質量で定義している．

熱力学関数	表記	全微分
内部エネルギー	U	$dU = Tds - Pdv$
エンタルピー	H	$dH = Tds + vdP$
ヘルムホルツ自由エネルギー	F	$dF = -sdT - Pdv$
ギブス自由エネルギー	G	$dG = -sdT + vdP$

(1-1) 以下の $\boxed{ア}$ と $\boxed{イ}$ に熱力学関数（U, H, F, G）から適当なものを選び, $\boxed{ウ}$ ～ $\boxed{カ}$ に状態量（T, P, v, s）から適当なものを当てはめよ.

$$c_v = \left(\frac{\partial \boxed{ア}}{\partial \boxed{ウ}}\right)_{\boxed{エ}} \quad , \qquad c_p = \left(\frac{\partial \boxed{イ}}{\partial \boxed{オ}}\right)_{\boxed{カ}}$$

(1-2) Uは温度のみの関数であること，すなわち，以下の関係式を示せ.

$$\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)_T = 0$$

(1-3) この気体の断熱過程において，以下の関係式の成り立つことを説明せよ．ただし，γは比熱比（$\gamma = c_p/c_v$）である．(1-2) の関係式に加え，Hも温度のみの関数であることは証明なく用いてよい.

$$\frac{dP}{P} = -\gamma \frac{dv}{v}$$

(1-4) この気体の音速αの温度依存性を式で示せ.

（2） 気体の中に固体粒子が分散している混合系の音速について考える．気体は（1）と同じもので，状態方程式（B）に従う．固体粒子は，比体積v_sの物質でできており，変形や体積変化はしないものとする．以下の問いに答えよ.

(2-1) 図１のような，断熱枠で囲まれた混合系の圧縮を考える．体積V_0からV_1（$< V_0$）への圧縮変化について，以下の文の $\boxed{あ}$ ～ $\boxed{か}$ に「増加」「減少」「高」「低」「気体」「固体粒子」のうち適切な言葉を当てはめよ．初期体積V_0における系の温度，圧力をT_0，P_0とする.

系を圧縮すると，気体の比体積vが $\boxed{あ}$ する．気体と固体粒子の間で熱のやり取りがない場合，気体の温度は $\boxed{い}$ しT_1となるが，固体粒子の温度は変化しない．この時の圧力をP_1とする．一方，気体と固体粒子の間で熱交換が許されると，熱は $\boxed{う}$ から $\boxed{え}$ へ流れ，熱平衡が達成される．この時の温度，圧力をT_2，P_2とする．温度 T_2は T_0より $\boxed{お}$ く，圧力 P_2は P_1より $\boxed{か}$ い.

(2-2) 混合系単位質量当たりの固体粒子の質量をϕとすると，混合系の比体積$\bar{v}$は，以下の式で表される．

$$\bar{v} =(1-\phi)v + \phi v_s$$

混合系の音速$\bar{\alpha}$は, 式(A)の気体比体積vを$\bar{v}$に置き換えた以下の式で, 近似的に求められる．

$$\bar{\alpha} = \sqrt{-\bar{v}^2\left(\frac{\partial P}{\partial \bar{v}}\right)_{ad}}$$

ここで，添え字adは，図１のように断熱枠で囲まれた混合系の膨張・収縮変化を意味する．断熱枠は音波の波長に比べて十分小さいとし，内部の気体のvやPは一様に増減すると考えてよい．固体の運動は無視できるものとし， ϕは一定とする．固体粒子と気体の間で熱のやり取りがない場合，音速$\bar{\alpha}$を求めよ．解答において，（1-4）で求めた気体の音速をαと置いてよい．

(2-3) 音波が伝わる際に，気体と固体粒子の熱平衡を保ったまま，混合系が準静的に膨張・収縮するとする．この場合，混合系の音速は（2-2）で求めたものに比べて大きくなるか小さくなるか，答えよ．また，その理由を（2-1）の答えに基づいて100字程度で説明せよ．

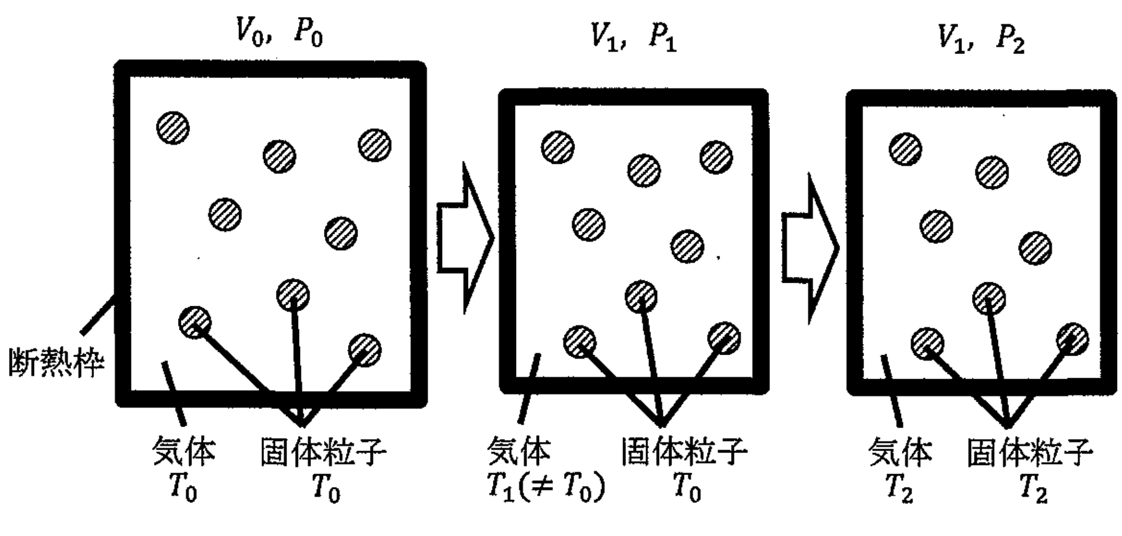


図１