数　学

【第１問】

以下の問いに答えよ.. 途中経過も含めて解答すること.

（１）　行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

について以下の問いに答えよ．ただし，a は実数とする．

（1-1）A の固有値をxとする．xを与える方程式を a を用いて表せ．

（1-2）A の固有値が互いに異なる３つの実数であるとき，a の満たすべき条件を求めよ．

（２）　エルミート多項式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right) \quad (n \text{ は } n \geq 0 \text{ の整数})$$

に関する以下の問いに答えよ．xは実数とする．

（2-1）エルミート多項式 H_0, H_1, H_2, H_3, H_4 をxの多項式として書き下せ．また，H_3のグラフを範囲 $-2 \leq x \leq 2$で図示せよ．ただし，図中にx切片の値を明記すること．

（2-2）エルミート多項式は以下の関係を満たす．

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n = e^{-t^2+2xt}$$

ただし，tは実数とする．これを用いて，エルミート多項式が以下の式を満たすことを示せ．

$$H_{n+2}(x) = 2xH_{n+1}(x) - 2(n+1)H_n(x)$$

(2-3) (2-2) で導いた関係を用いて，エルミート多項式が以下の式を満たすことを示せ.

$$\frac{d^2H_n(x)}{dx^2} - 2x\frac{dH_n(x)}{dx} + 2nH_n(x) = 0$$

（3） 確率変数 x（ただし，$x = 0, 1, 2, \ldots$）の確率関数が，

$$P(x) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$$

で与えられるとき，これを平均 λ のポアソン分布という．以下の問いに答えよ.

(3-1) あるデータサーバーが多数のハードディスクドライブ(HDD)により構成されている． 1ヶ月間のHDDの故障が，2台以内ならばデータが失われない．このサーバーにおける1ヶ月間のHDD故障数を確率変数としたとき，その確率関数はポアソン分布で近似できる．1ヶ月間の故障数の平均が1台であるとき，ある月にデータが失われる確率を求めよ．ただし，月の日数の差は無視し，個々のHDDの故障する事象は互いに独立であるとする．HDDの故障以外の原因でデータが失われることはないとする.

(3-2) 1回の試行で事象Aが起こる確率が p であるとき，互いに独立な n 回の試行で事象Aが x 回起きる確率は二項分布に従い，その確率関数は，

$${}_nC_x p^x (1-p)^{n-x}$$

で与えられる．n 回の試行で事象Aが起こる回数の期待値γを求めよ．また，γを一定に保ったままnを無限大に近づけると，二項分布はポアソン分布に近づくことを示せ.

ただし，$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)^n = e^\gamma$ であることを用いてもよい.

数　学

【第２問】

微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2h\frac{dx}{dt}+p^2x=\sin qt \qquad \text{(A)}$$

について以下の問いに答えよ．途中経過も含めて解答すること．ただし，x は t の関数であり，h，p，qは正の定数，$h<p$ とする．

（１）　$x=a\sin qt+b\cos qt$ と置くことにより，(A)の特殊解を求めよ．
ただし，a，bは実数の定数である．

（２）　(A)に対応する斉次方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2h\frac{dx}{dt}+p^2x=0$$

の解を求めることにより，(A)の一般解を２つの積分定数を用いて表せ．

（３）　$q=p$ の場合，初期条件

$$t=0 \text{ のとき，} x=0 \text{ および } \frac{dx}{dt}=0$$

を満たす(A)の解を h，pを含む式で表せ．

（４）　（３）の解について，$y=\frac{dx}{dt}$ としたとき，t が $\frac{1}{h}$ より十分大きいときの x および y の式を示し，xy平面上にそのグラフを描け．x軸，y軸との切片も記入せよ．さらに，原点付近の微分係数 $\frac{dy}{dx}$ に注意し，$(x(t),y(t))$ の $t\geq 0$ における軌跡を同じ xy平面上に描け．