物 理 学

【第３問】

静止した水平面に，底面を下にして置かれた半球（剛体）の，半球面上における物体の運動に関連した以下の問題に答えよ．ただし，重力加速度の大きさを g，半球の半径を a，底面（円）の中心をＯとする．物体の運動は，この半球面の最高点Ｈから開始したとし，以下の問題では初速の影響は無視できるとする．また，物体の重心は，水平方向に x 軸，鉛直上向きに y 軸をとった xy 面内で運動するとし，静止系からみたその重心の速度を $\vec{v}=(v_x, v_y), v_x>0$ とする．

（１） 半球が水平面に固定されているとする．質量 m の質点が，半球面に沿って滑らかに運動し，半球面から離れる瞬間までを考える．ある時刻 t における質点の位置をＰとし，Ｏ を通る垂線 OH と直線 OP のなす角を θ とする（図１）．

(1-1) 点Ｐにおける v_y/v_x を，θ を用いて表せ．

(1-2) 点Ｐにおける質点の速さ $v=|\vec{v}|$ を，θ，a，g を用いて表せ．

(1-3) 質点が半球面から離れる瞬間の位置における $\cos\theta$ の値を求めよ．

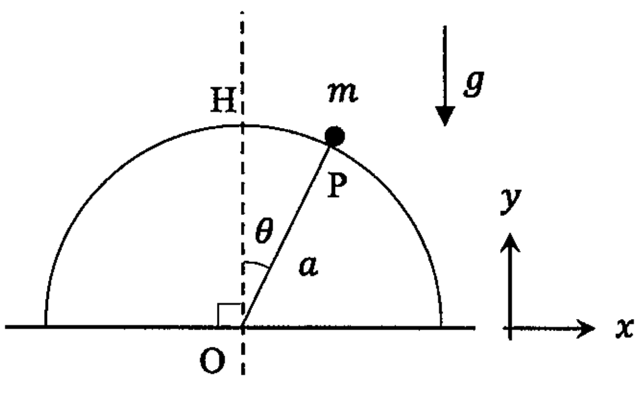

図１

（2）　（1）において水平面に固定されていた半球が，ここでは水平面上を摩擦が働くことなく滑らかに運動できるとする．ここで，半球の質量を M，静止系からみた半球の速度の x 成分を V_x とし，初期状態では $V_x = 0$とする．質量 m の質点が，この半球の滑らかな半球面に沿って運動し，半球面から離れる瞬間までを考える．ある時刻 t における質点の位置を P とし，O を通る垂線 OH と直線 OP のなす角を θ とする（図２）．

(2-1) v_x と V_x の間に成り立つ関係を求めよ．

(2-2) 点 P における v_y/v_x を，θ，m，および M を用いて表せ．

(2-3) 図２のように，半球に固定された，O を基準とする極座標 (r,θ)（それぞれの単位ベクトルは，$\vec{e}_r$ および $\vec{e}_\theta$）を用いて質点の運動を記述する．この座標系における$\vec{e}_r$方向と$\vec{e}_\theta$方向の運動方程式を，加速度の成分 (α_r,α_θ) を用いて記述せよ．ただし，質点が半球面から受ける垂直抗力を N とし，運動方程式には dV_x/dt を含んでよい．

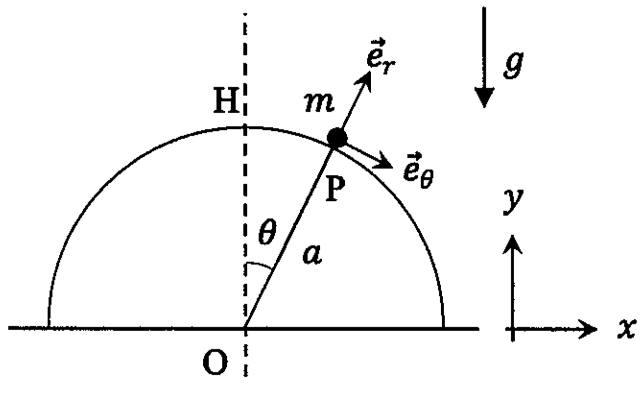

図２

（３） 再び，半球が水平面に固定されているとする．密度が一様な，半径 b，質量 m_s の球（剛体）が，半球面上を滑らずに転がり落ちる場合について考える（図３）．ある時刻 t における球の重心の位置を Q とし，O を通る垂線 OH と直線 OQ のなす角を θ とする．ただし，球の半径 b は半球の半径 a より十分小さいとし，球は水平面に接触しないとする．また，運動に伴うエネルギー損失は無視できるとする．

(3-1) 点 Q における球の重心の速さ$v = |\vec{v}|$を，θ，a，b，および g を用いて表せ．球の重心の速さと球が転がる回転角速度 ω の間には，$v = b\omega$ の関係があり，また，考えている球の中心を通る軸のまわりの慣性モーメントが $(2/5)m_s b^2$ で与えられることを用いてよい．

(3-2) 球の重心が点 Q を通過する時に，半球面と球の間に働いている摩擦力を，θ，m_s，a，b，および g のうち，必要なものを用いて表せ．

(3-3) θ がある値を超えると球が半球面を滑り始める．滑り始める瞬間の θ を求める関係式は，係数 A，B，Cを用いて

$$A\cos\theta + B\sin\theta + C = 0$$

のように表される．半球面と球の間の静止摩擦係数を μ として，A，B，C を求めよ．

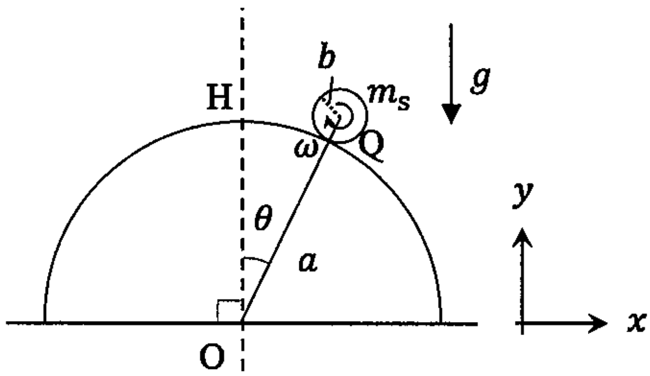

図３

物　理　学

【第４問】

ダイオードを用いた整流回路に関する以下の問いに答えよ．ただし，電線の抵抗および電源の内部抵抗はゼロとみなす．ダイオードに流れる電流を i_{D} とし，ダイオードの順方向（図１の矢印の向き）を正にとる．ダイオードは，順方向に電流が流れる時に電圧降下がゼロ，かつ，抵抗がゼロとなるものとする．また，ダイオードは逆方向に電流を流さないものとする．

（１）図１のように，交流電圧源，ダイオード，抵抗（抵抗値はR）からなる回路を考える．電位の基準点を図中の点 $\mathrm{P_0}$ とし，点 $\mathrm{P_s}$ の電位が時刻 t に対して $V_{\mathrm{s}} = V_{\mathrm{s0}}\sin(\omega t)$ のように変動する状況を考える．ただし，V_{s0}，ωはいずれも正の定数である．また，点 $\mathrm{P_x}$ の電位をV_{x}とする．

(1-1) V_{x}を，V_{s0}，ω，t を用いて表せ．

(1-2) 上記（1-1）で求めた V_{x} の，一周期当たりの時間平均値を求めよ．

（２）図２のように，交流電圧源，ダイオード，抵抗（抵抗値はR），コンデンサ（容量はC）からなる回路を考える．電位の基準点を図中の点 $\mathrm{P_0}$ とし，時刻 t に対して点 $\mathrm{P_s}$ の電位は $V_{\mathrm{s}} = V_{\mathrm{s0}}\sin(\omega t)$ のように変動する．ただし，V_{s0}，ωはいずれも正の定数である．時刻 $t = 0$ においてコンデンサに電荷は無いものとする．抵抗を流れる電流 i_{R} およびコンデンサに流れ込む電流 i_{C} はいずれも図２の矢印の向きを正とする．また，点 $\mathrm{P_x}$ の電位をV_{x}とする．

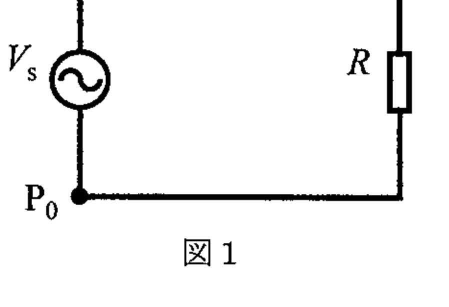

図１

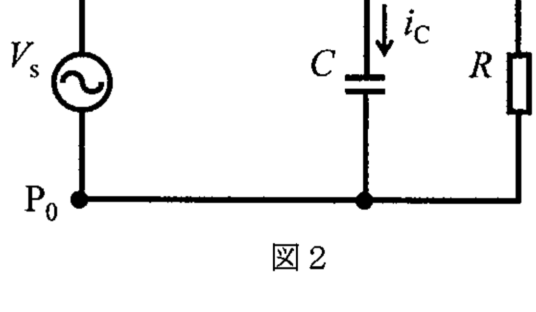

図２

(2-1) V_x を，i_R および R を用いて表せ．また，V_xの時間微分$\mathrm{d}V_\mathrm{x}/\mathrm{d}t$を i_C および C を用いて表せ．

(2-2) 時刻 $t=0$ からしばらくの間はダイオードに電流が流れているが，ある時刻 $t=t_0$を境に，一定の時間にわたって$V_\mathrm{x}>V_\mathrm{s}$となり，ダイオードに電流が流れなくなる．ダイオードに電流が流れない時間帯のV_xを，V_s0，ω，t，t_0，R，Cを用いて表せ．

（3） 図３のように，交流電圧源，ダイオード，抵抗（抵抗値は R），そして２つのコンデンサ（容量はいずれも C）からなる回路を考える．電位の基準点を図中の点 $\mathrm{P_0}$とし，時刻 t に対して点 $\mathrm{P_s}$の電位は $V_\mathrm{s}=V_\mathrm{s0}\sin(\omega t)$ のように変動する．ただし，V_s0，ωはいずれも正の定数である．時刻 $t=0$ においては，いずれのコンデンサにも電荷は無いものとする．図中の点 $\mathrm{P_x}$の電位を V_x，点 $\mathrm{P_y}$の電位を V_yとする．

(3-1) ダイオードに電流が流れている場合，V_y が満たす微分方程式は

$$\frac{\mathrm{d}V_\mathrm{y}}{\mathrm{d}t}+fV_\mathrm{y}=g$$

のように書ける．また，ダイオードに電流が流れていない場合，V_yが満たす微分方程式は

$$\frac{\mathrm{d}^2V_\mathrm{y}}{\mathrm{d}t^2}+h\frac{\mathrm{d}V_\mathrm{y}}{\mathrm{d}t}=0$$

のように書ける．f，g，hをそれぞれ，V_s0，ω，t，R，C のうち必要なものを用いて表せ．

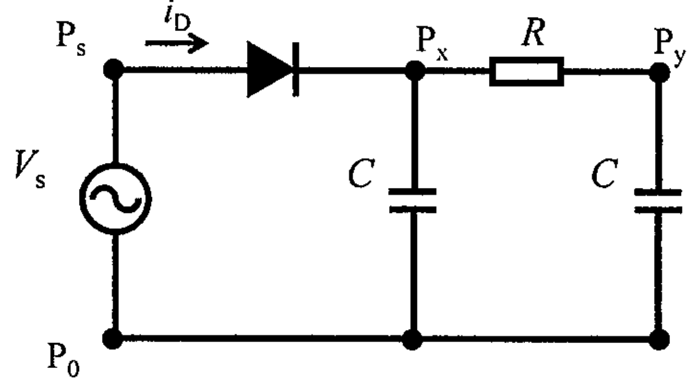

図３

(3-2) ある時間帯 $2n\pi/\omega \le t < 2(n+1)\pi/\omega$ （nは整数）においてダイオードが ON になる（$i_{\mathrm{D}}=0$ から $i_{\mathrm{D}}>0$ に変化する）時刻を t_n とし，その時刻におけるV_{y} を$V_{\mathrm{y}n}$と表す．$t_n < t$ において初めてダイオードが OFF になる（$i_{\mathrm{D}}>0$ から $i_{\mathrm{D}}=0$ に変化する）までの時間帯を考えると，V_{y} は

$$V_{\mathrm{y}} = V_{\mathrm{e}}\exp[A_0(t-t_n)] - V_{\mathrm{c}}\cos(\omega t+\delta)$$

の形で書ける．定数 V_{e}，V_{c}，A_0，δ を $V_{\mathrm{y}n}$，V_{s0}，ω，R，C，t_n のうち必要なものを用いて表せ．

(3-3) (3-2) で定めた t_n に対し $t_n < t$ において初めてダイオードが OFF になる時刻を t_n' とし，その時刻におけるV_{x}, V_{y} をそれぞれ$V_{\mathrm{x}n}'$，$V_{\mathrm{y}n}'$と表す．$t_n' < t$ でダイオードが次に ON になるまでの時間帯を考えると，V_{y} は

$$V_{\mathrm{y}} = V_1 + V_2\exp[A_1(t-t_n')]$$

の形で書ける．定数A_1を R，Cを用いて表せ．また，定数 V_1，V_2を，それぞれ $V_{\mathrm{x}n}'$，$V_{\mathrm{y}n}'$ を用いて表せ．

(3-4) $\omega RC \gg 1$ のときのV_{x}，V_{y}の時間変化に関する以下の文を読み，a から e の括弧内について，それぞれ適切な語句を選択せよ．なお t_n，t_n' はそれぞれ (3-2)，(3-3) で定めた時刻である．

「$t_n < t < t_n'$において最初，V_{x} は V_{s} に等しく（a：増加/減少）する．このときV_{y}も変化するが，$\omega RC \gg 1$であるため，V_{y} の変化量は V_{x} の変化量よりもずっと（b：大きい/小さい）．同時間帯のどこかで V_{x} の増減は反転し，$t = t_n'$でダイオードが OFF になると，その後 $t_n' < t < t_{n+1}$ においては V_{x}とV_{y}の差が（c：増加/減少）するようにコンデンサが充放電される．このようなサイクルを繰り返して次第にV_{y}は（d：増加/減少）し，V_{s0}との差が（e：増加/減少）していく．」

物 理 学 ／ 化 学

【第５問】

化学反応や相転移が起こらない気体１モルからなる系を考える．温度を T，圧力を P，体積を V，内部エネルギーを U，エントロピーを S とし，状態量 X の微小な変化を dX と表す．ここでは準静的な過程を考え，必要な場合には，以下のマクスウェルの関係式を用いてよい．

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P, \quad \left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V = -\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S$$

ここで，$\left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)_X$ は X が一定に保たれたもとでの Z の Y に関する偏微分を意味する．

以下では特に断らない限り，一般の不活性な気体を想定して解答せよ．ただし，系が理想気体である場合は，定積比熱 C_V および定圧比熱 C_P は定数となり，U は $U = C_V T$，理想気体の状態方程式は気体定数 R を用いて $PV = RT$ と表されることを用いてよい．

（１） 系が理想気体である場合を考える．

(1-1) 系が吸収する微小な熱量を δQ，系がする微小な仕事を δW としたとき，熱力学第一法則を δQ，δW，dU を用いて表せ．また，準静的過程における熱力学第一法則は $TdS = dU + PdV$ となることを示せ．

(1-2) この系が断熱膨張するとき，dT と dP との間に成り立つ以下の関係式を導け．

$$\frac{dT}{dP} = \frac{RT}{(R + C_V)P}$$

（２） エンタルピー H は，$H = U + PV$ で定義される．

（2-1）以下の関係式が成り立つことをそれぞれ示せ．

$$T = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_P, \quad V = \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_S$$

（2-2）定圧過程においては，系が吸収する微小な熱量 δQ が，エンタルピーの微小な変化 dH と等しくなることを示せ．

（2-3） C_P が以下の式で表されることを示せ．

$$C_P = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P$$

（2-4） H を T と P の関数とみなし，以下の関係式を示せ．

$$dH = C_P dT - \left[T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P - V\right] dP$$

（3） ギブスの自由エネルギー G は $G = U + PV - TS$ で定義される．ギブスの自由エネルギー G が T と P の関数として既知である場合，他のさまざまな物理量についても T と P の関数として求めることができる．$G = G(T, P)$ のように G が T と P の関数として決定されている気体について，以下の問いに答えよ．

（3-1）この気体の状態方程式（T, P, V の間に成り立つ関係式）を既知関数 $G(T, P)$ を用いて示せ．

（3-2）この気体の密度変化 $d\rho$ は，温度変化 dT と圧力変化 dP を用いて次のように表される．

$$d\rho = \alpha\, dT + \beta\, dP$$

このとき，α および β を T と P の関数として求めよ．ただし，ρ はこの気体の密度であり，ここでは $\rho = \frac{1}{V}$ と定義する．

（3-3）この気体が断熱的に膨張した場合の温度変化 dT は，圧力変化 dP を

用いて次のように表される．

$$dT = \Gamma\, dP$$

ここで，Γ は断熱温度変化率である．Γ を T と P の関数として求めよ．

(3-4) この気体のみから成る惑星大気の鉛直気温分布について考える．大気が安定成層しているとき，鉛直気温分布における勾配 $\frac{dT}{dP}$ が満たすべき条件を (3-2) の α と β，および (3-3) の Γ のうち必要なものを用いて示せ．ただし，安定成層とは，ある空気塊を断熱的に上昇（下降）させたとき，その空気塊の密度が周囲の大気の密度よりも大きく（小さく）なり，元の位置に戻ろうとする復元力が働く状態のことである．