物　理　学

【第３問】

図１のように，半径a，質量Mの一様な２つの剛体の球が，質量の無視できる剛体の棒で連結された物体がある．物体の重心は棒の中点にあり，その位置に座標の原点Ｏをとる．図１のx, y, z軸は互いに直交しており，棒の向きとz軸とが一致している．重心から球の中心までの距離をhとする．この物体のx, y, z軸のまわりの慣性モーメントをそれぞれI_x, I_y, I_zと表す．

（１） 半径a，質量Mの一様な球の，中心を通る軸のまわりの慣性モーメントは$(2/5)Ma^2$である．このことを用いて，以下の問いに答えよ．

(1-1) I_zを求めよ．

(1-2) I_xを求めよ．

（２）この物体を重力下に置く．重力加速度は一定で，その大きさをgとする．静止した状態において，重力加速度の向きは$-z$の方向であった．x軸に平行な直線 $y = 0$, $z = \zeta$ ($\zeta > 0$) のまわりにこの物体を物理振り子として小振幅の振動をさせたときの固有角振動数をσ ($\sigma > 0$) とする．以下の問いに答えよ．

(2-1) σ^2をa, g, h, ζを用いて表せ．

(2-2) σが最大になる ζ を求めよ．

（３）次に，この物体の慣性系における重心のまわりの回転運動を考える．ここではxyz座標系は物体に固定されているとする（物体座標系）．慣性系に対する物体の角速度ベクトルのx, y, z成分をω_x, ω_y, ω_zとし，$\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$とすると，オイラーの運動方程式

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{L} = \boldsymbol{N}$$

が成立する．ただし t は時間，$\boldsymbol{L} = \left(l_x, l_y, l_z\right)$ は物体の角運動量ベクトル，$\boldsymbol{N} = \left(n_x, n_y, n_z\right)$は外力のモーメントである．いま，物体が z 軸のまわりにω_zに比例するモーメントを持つ抵抗を受けており，$n_x = n_y = 0$, $n_z = -\mu\omega_z$であるとする（ただしμは定数で $\mu > 0$）．このとき，以下の問いに答えよ．解答のうえで必要な記号は適宜定義して使用してよい．

（3-1）ω_zが時間とともに指数関数的に減少することを示せ．

（3-2）ω_x，ω_yが時間とともに一定値に近づくことを示せ．

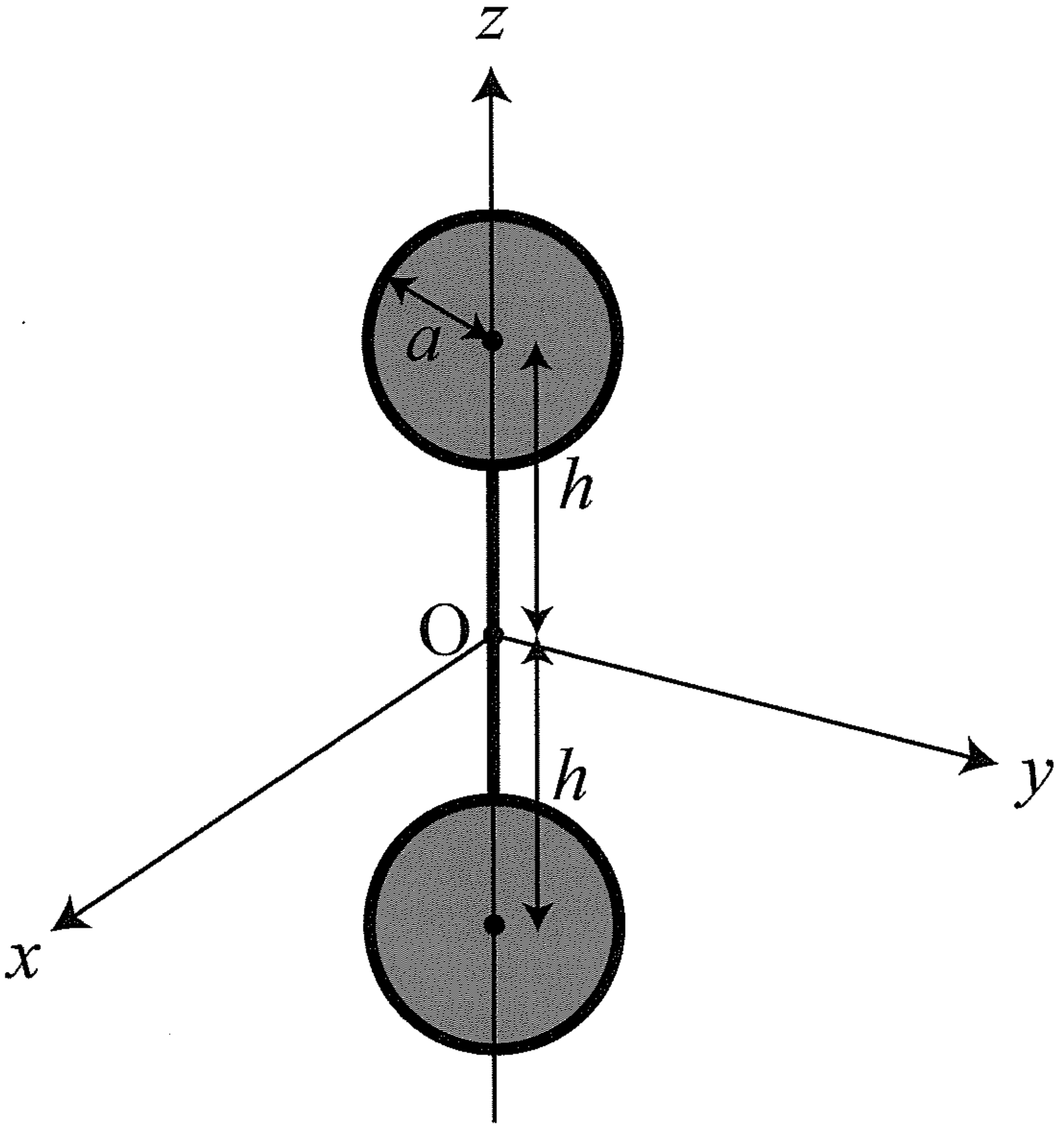

図 1

物　理　学

【第４問】

コイルに流れる電流とその周囲の磁場に関して以下の問いに答えよ．図１のように直交座標系を取る．半径 a，巻き数 N_1 の円形コイルが xy 面に置かれ，コイルの導線に定常電流 I が矢印の向きに流れている．このとき，中心点 O での磁束密度を B_0 と表す．ここで，中心点 O に，一辺の長さ b，巻き数 N_2 の小さな正方形コイルを置いた．正方形コイルは，x 軸のまわりに回転できる．なお，b は a に比べて非常に小さく，正方形コイルが動く範囲の磁場は一様とみなしてよい．なお，透磁率は μ_0 とする．

（１）磁束密度 B_0 を求めよ．

（２）正方形コイルを x 軸のまわりに角速度 ω_1 で回転させた場合を考える．

(2-1) 時刻 t において正方形コイルを鎖交する磁束量（コイル N_2 回巻きを貫通する磁束量）を求めよ．ただし，$t=0$ においてコイル面は xy 面に平行である．

(2-2) このとき，正方形コイルに発生する起電力を求めよ．

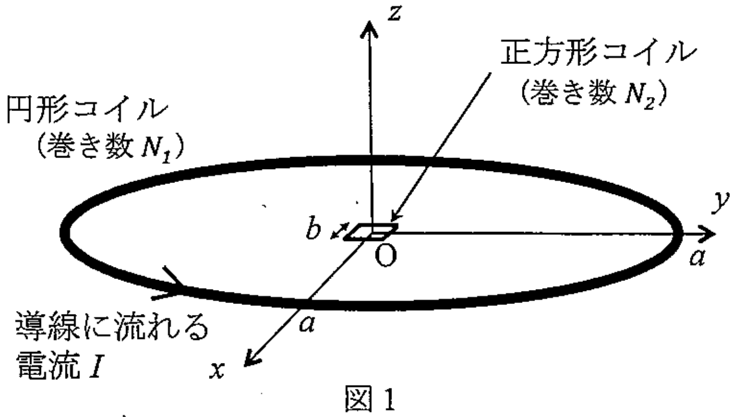

図１

（３）図２は，点 O に置いた正方形コイルの拡大図である．正方形コイルの導線に定常電流 J を矢印の向きに流す場合を考える．このとき，円形コイルに

よる磁場（磁束密度 B_0 ）によって，正方形コイルに偶力が作用し，正方形コイルが xy 面のまわりで調和振動を起こす．この振動数を測定することによって，磁束密度 B_0 の大きさを知ることができる．

(3-1) 正方形コイルのコイル面が，図２のように xy 面に対して角度 θ （図２で示される方向を正とする）にあるとき，辺 PQ，辺 QR，辺 RS，辺 SP に対して，正方形コイルのコイル面に垂直な磁場成分によって作用する力の大きさ，向きをそれぞれ求めよ．

(3-2) 同様に，各辺について，正方形コイルのコイル面内の磁場成分によって作用する力の大きさ，向きをそれぞれ求めよ．

(3-3) 正方形コイルが回転軸 TU のまわりに自由に回転できるとき，コイル全体に作用する偶力のモーメントを求め，回転運動を記述する式を記せ．ただし，正方形コイルの回転軸まわりの慣性モーメントを I_M とする．

(3-4) 正方形コイルの回転角 θ が小さいとき，正方形コイルが角振動数 ω_2 で調和振動した．このとき，磁束密度 B_0 を求めよ．

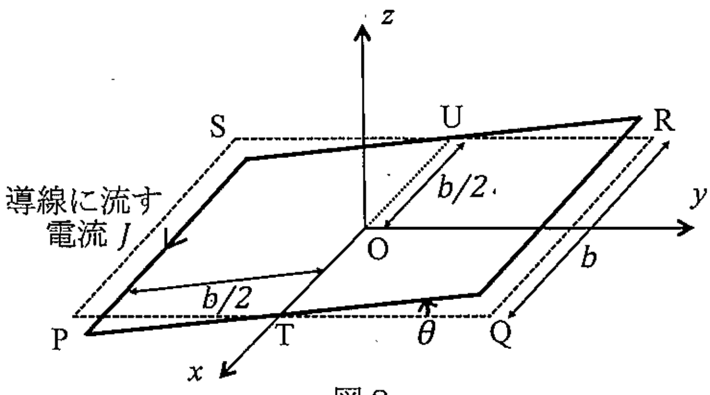

図２

(3-5) 振幅 α で調和振動する正方形コイルの回転角を $\theta = \alpha\sin(\omega_2 t)$ で表すとき，電磁誘導によって正方形コイルに生じる起電力の最大値を求めよ．ただし，θ は小さいとして２次近似 $\cos\theta \fallingdotseq 1 - \theta^2/2$ を用いてよい．

物 理 学 ／ 化 学

【第５問】

十分に薄く，かつ，十分に軽いゴムでできた球形の風船のなかに気体が入っているとき，この風船の大きさの断熱的変化を考える．ただし，風船は常に球形を保ち，圧力と表面張力以外の力は考えないものとする．また，気体は理想気体であるとし，定積比熱（C_V）と定圧比熱（C_P），比熱比（γ）はすべて一定とする．以下，圧力を P，温度を T，風船の体積を V，風船の半径を a として，以下の問いに答えよ．

（１） まず，風船の表面張力を無視した状態変化の考察を行う．ただし，風船内部の状態変化はポアソンの関係

$$PV^{\gamma} = 一定 \tag{A}$$

に従うものとする．

(1-1) 圧力を P_0 から P_1 に変化させたとき，風船の半径は a_0 から a_1 に変化した．このときの a_1 を a_0，P_0，P_1，γ を用いて表せ．

(1-2) 圧力変化（ΔP）と半径変化（Δa）が微小であるとして，ΔP と Δa との間の関係式を導け．

（２） 次に，風船の表面張力の効果を考える．いま，表面積（σ）を可逆的に微小変化（$d\sigma$）させるために必要な仕事 dW は

$$dW = \xi\, d\sigma \tag{B}$$

で与えられるとする．ただし，ξ は表面張力係数で，α を定数として，$\xi = \alpha T$ と表されると仮定する．このときの風船の半径変化を次の手順で求めよ．

(2-1) エントロピー変化（dS）と風船外部の圧力変化（dP），風船の体積変化（dV）の関係を，熱力学第一法則を用いて導け．

(2-2) 圧力を P_0 から P_1 に断熱的に変化させたとき，風船の半径は a_0 から a_1 に変化した．このときの a_0，a_1，P_0，P_1 の間の関係式を導け．

(2-3) 圧力変化（ΔP）と半径変化（Δa）が微小であるとして，ΔP と Δa との間の関係式を導け．

（３） 同じ材質でできた２つの風船に，注入する気体量を変えて，１つ（風船L）は大きく膨らまし，もう１つ（風船S）は小さく膨らます．いま，図１に示すように，この２つの風船を栓の閉まった十分に細い管でつないだ後，圧力 P_{out}，温度 T の閉じた容器の中に入れ，栓を開けて空気の流れを調べる．

(3-1) まず，栓を開ける前の風船１つだけについて考える．いま，風船の内側圧力を P_{in} としたとき，圧力差と表面張力の釣り合いから，P_{in} と P_{out}，a との間の関係式を導け．ただし，表面張力係数は ξ とする．

(3-2) 栓を開けた後に起きる現象を，その理由とともに，100 字以内で記述せよ．

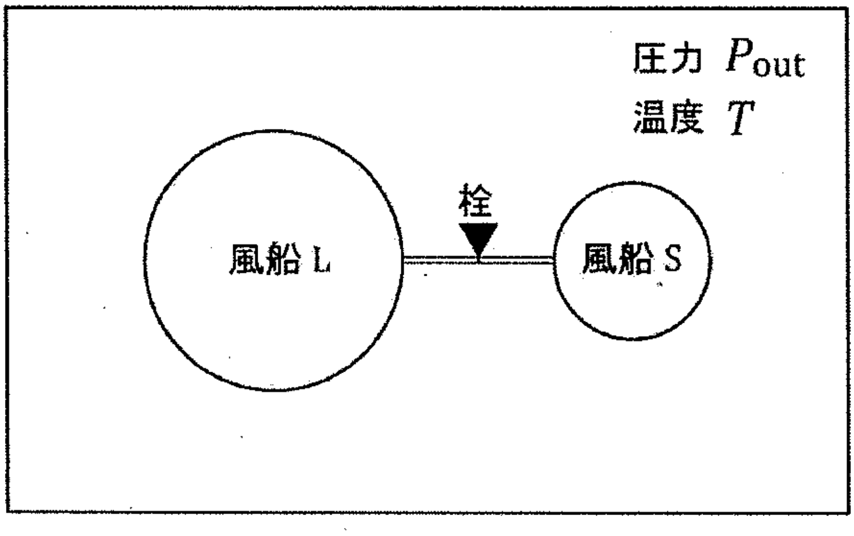

図１