数　学

【第１問】

以下の問いに答えよ．途中経過も含めて解答すること．

（１）　行列Aに関する以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 2 & 6 \\ 5 & 0 & -3 \\ -16 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

(1-1) 固有値を全て求めよ．

(1-2) 最小の固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(1-3) ケーリー・ハミルトンの定理を利用して，以下の行列Bの成分を計算せよ．ただし，Eは単位行列である．

$B = A^8 - 2A^7 - A^6 + 3A^5 - 2A^4 - A^3 + 2A^2 + A - 2E$

（２）　tの関数である$\varphi(t)$について，２階の微分方程式

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} - 2a\frac{d\varphi}{dt} + b\varphi = 0$$

の一般解を求めよ．次に，初期条件$\varphi(0) = \varphi_0$，$\left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{t=0} = 0$

を満たす解を求めよ．ここで，a, bは正の定数であり，$b - a^2 > 0$とする．

（３）　z，z_0は複素数で，$i = \sqrt{-1}$とする．以下の問いに答えよ．

(3-1) 複素平面上でz_0を中心とする半径$r > 0$の円周上を反時計回りに１周する積分路C_1について，次の積分を計算せよ．

$$I_1 = \oint_{C_1} (z - z_0)^{-1} dz$$

(3-2) 複素平面上で$|z| = 2$の円周上を反時計回りに 1 周する積分路C_2について，次の積分を計算せよ．

$$I_2 = \oint_{C_2} \frac{z}{z^2 + 1} dz$$

（4） 6 個の数字（1，2，3，4，5，6）から異なる 4 個の数字を並べてできる 4 桁の数に関する以下の問いに答えよ．

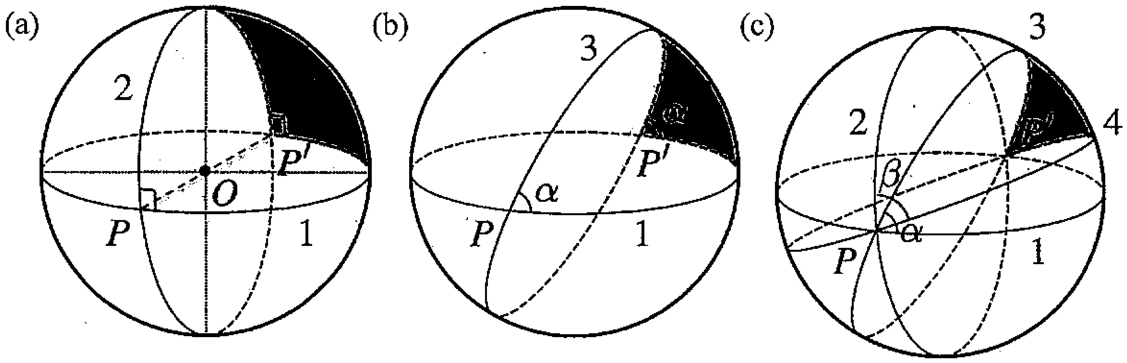
(4-1) 偶数は何通りできるか答えよ．

(4-2) 3 の倍数は何通りできるか答えよ．

数　学

【第２問】

3 次元空間内の原点Oを中心とする半径1の球面を考える．原点Oを通る平面と球面の交線を大円とよぶ．n本の大円で囲まれた球面上の図形を球面n角形とよぶとき，以下の問いに答えよ．



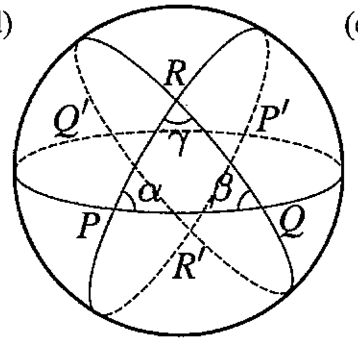
（１）図(a)～(c)の着色部に示すような，2 点P，P'で交わる大円のつくる球面 2 角形について以下の問いに答えよ．

(1-1) 図(a)の大円 1, 2 のつくる球面 2 角形の面積を求めよ．ただし，点P，P'における内角は$\pi/2$である．

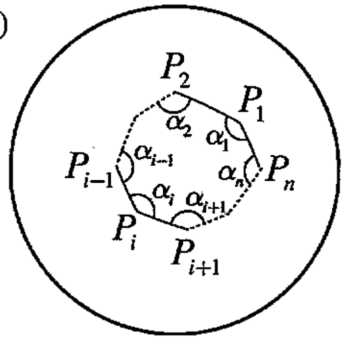
(1-2) 図(b)の大円 1, 3 のつくる球面 2 角形の面積を求めよ．ただし，点P，P'における内角は$0<\alpha<\pi$である．

(1-3) 図(c)の大円 1，2，3，4 を考える．点P，P'において大円 1，2 のなす角は$\pi/2$，大円 1，3 のなす内角は$0<\alpha<\pi/2$，大円 2，4 のなす内角は$0<\beta<\pi/2$である．$\alpha+\beta>\pi/2$のとき，大円 3，4 のつくる球面 2 角形の面積を求めよ．

(d)



(e)



（2） 図(d)に示す球面 3 角形ΔPQRの面積Aを求めたい．頂点P，Q，RにおけるΔPQRの内角はそれぞれα，β，γである．また，交点P'，Q'，R'はそれぞれP，Q，Rと原点対称な点である．

(2-1) 点P，P'を頂点としΔPQRを含む球面 2 角形をT_P，点Q，Q'を頂点としΔPQRを含む球面 2 角形をT_Q，点R，R'を頂点としΔPQRを含む球面 2 角形をT_Rとする．和集合$T = T_P \cup T_Q \cup T_R$の面積$A_T$を$\alpha$，$\beta$，$\gamma$，$A$で表せ．

(2-2) ΔPQRの面積Aを求めよ．

（3） 図(e)に示すような点P_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$を頂点とする球面n角形の面積Aを求めよ．ただし，頂点P_iにおける内角をα_iとする．