# 物　理　学

【第３問】

図 1 のように，平らな地表面に置かれた発射台から，弾丸を空中に向けて発射する．$z$ 軸を鉛直上向きにとり，$x$ 軸を水平面内にとる．弾丸は，時刻 $t=0$ に原点 O $(0, 0)$ から初速度 $V$ $(V>0)$，$x$ 軸からの角度 $\lambda$ $(0 \leq \lambda \leq \pi)$ で $xz$-平面内に発射される．重力加速度の大きさを $g$ とし，空気の抵抗および地球の自転の影響は考えないものとする．また，発射台の高さは無視してよい．

（１）最初に，重力加速度の大きさ $g$ が一定である場合を考える．$g=g_0$（ただし $g_0$ は定数）として，以下の問いに答えよ．

(1-1) 角度 $\lambda=\pi/2$ で発射したとき，弾丸が到達する最高点の地表からの高さ $h_1$ を求めよ．

(1-2) 弾丸をある角度 $\lambda_1$ で発射したとき，空中の点 P $(x_1, z_1)$（ただし $z_1>0$）を通過した．$\lambda_1$ を $x_1, z_1, V, g_0$ を用いて表せ．

(1-3) 角度 $\lambda$ を 0 から $\pi$ まで変化させたとき，$xz$-平面内で弾丸が通過する範囲を図示せよ．グラフの切片の値を記入し，縦横の比率にも注意すること．

（２）重力加速度の大きさ $g$ は，厳密には一定ではなく，地表から上空へ行くにしたがって地球の中心からの距離が変わることにより変化する．このことの効果を調べてみよう．$g$ が地表付近において $g=g_0-\alpha z$ $(z>0)$ のように近似されるとする．ただし $g_0$ は地表面 $z=0$ での重力加速度であり，（１）における $g_0$ と同一である．$g_0 \gg \alpha z$ が成立する範囲で考えるとして，以下の問いに答えよ．

(2-1) 地球の密度分布が球対称であるとする．万有引力定数 $G$，地球の質量 $M$，地球の半径 $R$ を用いて，$\alpha$ を表せ．また，$GM=4.0\times10^{14}\ \mathrm{m^3s^{-2}}$,

$R = 6.4 \times 10^6$ m として，αの値（単位は $s^{-2}$）を有効数字 1 けたで求めよ．

(2-2) 角度$\lambda = \pi/2$ で弾丸を発射する．弾丸が上昇している間について，時刻 $t$ を弾丸の高さ $z$ の関数として表せ．ただし，以下の不定積分の公式を用いてよい．

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\log\left|2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}\right| \qquad (a > 0)$$

(2-3) (2-2)の場合に弾丸が到達する最高点の地表からの高さを $h_2$ とする．この $h_2$ と（1-1）で求めた $h_1$ との差 $h_2 - h_1$ を求めよ．ただし，αは十分小さいとして，テイラー展開を用いてαの一次の項まで求めよ．

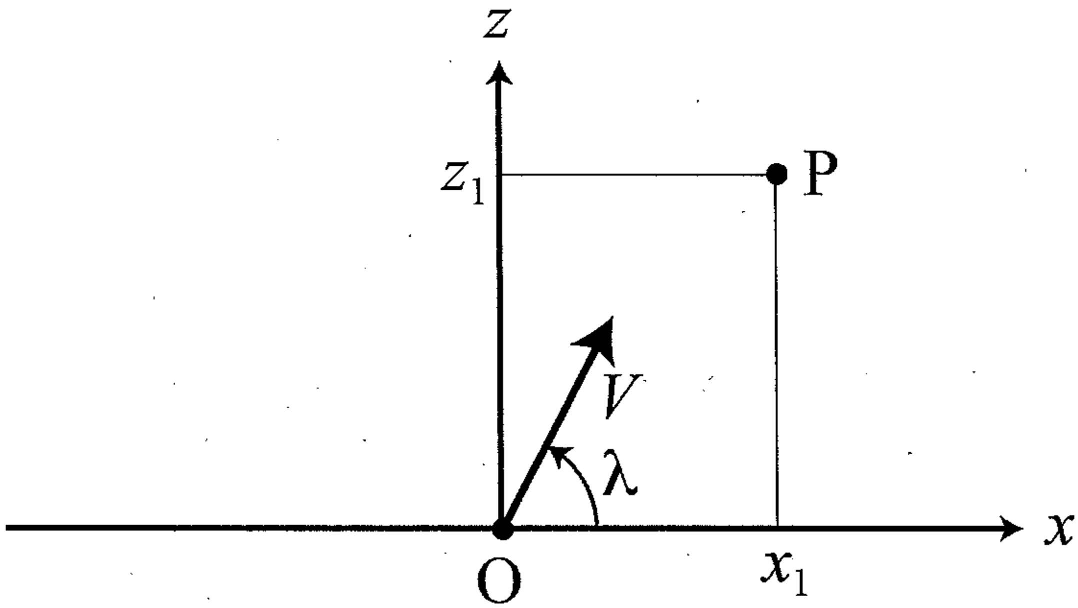


図 1

# 物　理　学

【第４問】

コンデンサの充放電に関する以下の問いに答えよ．ただし，電線の抵抗値は無視する．

（１）起電力 $V$ の電源，静電容量 $C$ のコンデンサ，抵抗 $R$ およびスイッチ S を電線で接続し回路を組み立てた（図１）．最初に，コンデンサの電荷をすべて放電させ，時刻 $t=0$ にスイッチ S を閉じた．時刻 $t$ にコンデンサに蓄えられている電荷を $Q(t)$，抵抗 $R$ を流れる電流を $i(t)$（正電荷が流れる方向を正）とする．以下の問いに答えよ．

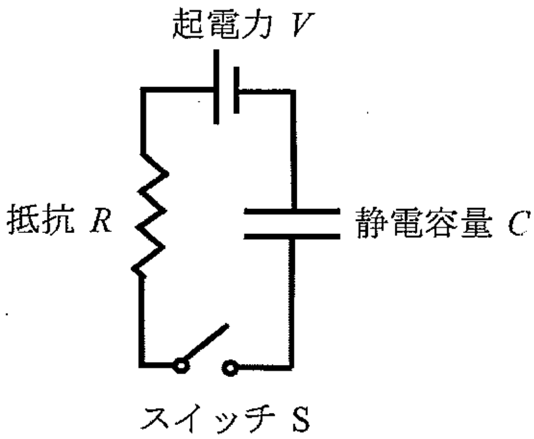


図１

（1-1）$i(t)$ と $Q(t)$ の関係式を記せ．

（1-2）$Q(t)=CV[1-\exp(-\dfrac{t}{RC})]$ となることを示せ．

（1-3）$0<t<a$ の間に抵抗 $R$ が消費したエネルギーを求めよ．

（2）静電容量 $C$ のコンデンサ C1 と C2 および整流器（ダイオード）D1 と D2 を電線で接続し，実験を行った（図２）．時刻 $t$ に，コンデンサ C1 と C2 を構成するそれぞれ２枚の電極板に充電されている電荷を，図２に示すように $\pm Q1(t)$ と $\pm Q2(t)$ と表す．実験を始める前に，コンデンサ C1 の電荷をすべて放電させ，C2 には正の電荷 $q$ を充電した $(Q2(0)=q)$．時刻 $t=0$ から図３のような電位を $V_{\mathrm{in}}$ に与えたところ，２つの整流器には交互に電流が流れた．この実験について以下の問いに答えよ．

ただし，時刻 $T_-$ とは時刻 $T$ よりもわずかに前の時刻を表し，時刻 $T_+$ は時刻 $T$ よりもわずかに後の時刻を表す．また，この整流器は，図４のように点Ａと点Ｂを定めたとき，点Ａの電位が点Ｂの電位よりも高い場合に区間 AB が短絡していると見なすことができ，それ以外の場合には開放しているとみなすことができる．

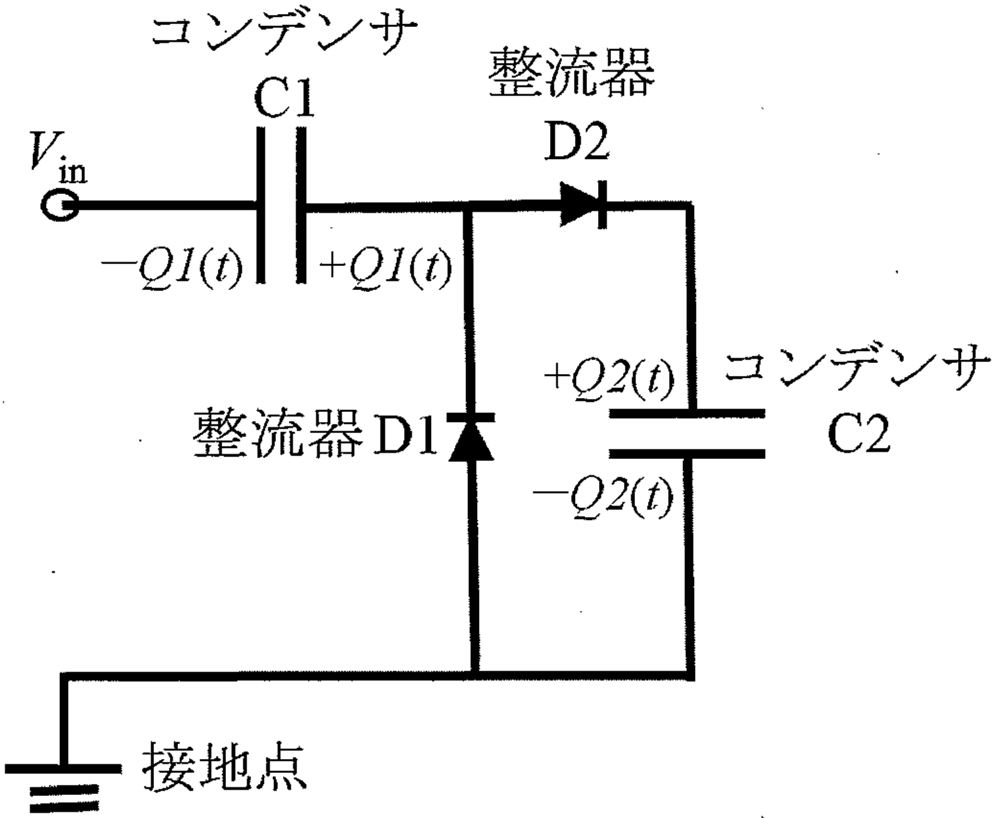


図２

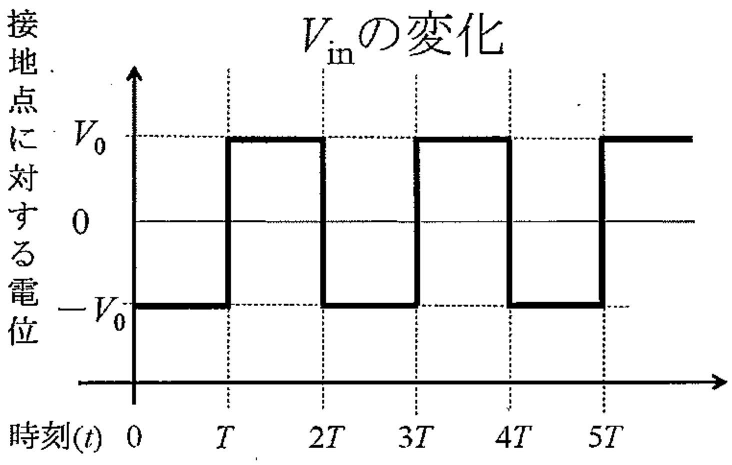


図３


図４

(2-1) 時刻 $t$=$T_-$ における $Q1(T_-)$ と $Q2(T_-)$ を求めよ．

(2-2) ２つの整流器に交互に電流が流れたことを用いて， $q$ に関する制約条件を求めよ．

(2-3) 時刻 $t$=$2T_-$ における $Q1(2T_-)$ と $Q2(2T_-)$ を求めよ．

(2-4) 時刻 $t$=$2nT_-$ における $Q2(2nT_-)$ を求めよ．ただし，$n$ は正の整数とする．

(2-5) この実験を続けた場合，コンデンサ C2 に充電されている電荷の漸近値 $Q2(t\rightarrow\infty)$ を求めよ．

# 物 理 学 ／ 化 学

【第５問】

１モルの理想気体を考え，圧力を $p$，体積を $V$，温度を $T$，内部エネルギーを $U$ とする．気体定数を $R$ として，理想気体１モルの状態方程式は $pV=RT$ とする．問題文中の式（A）と（B）は，導出できなかった場合でもそれ以降の設問の解答に使用してよい．

（１）体積を $V$ から $V+dV$ まで連続的に変化させたときの吸熱量を $\delta Q$ とする．このとき，熱力学第一法則を表す式を書け．ここで $dV$ は微小量とする．

（２）理想気体の内部エネルギーが等温過程で体積 $V$ に依存しないことを用いて，以下の式を示せ．ここで，$C_V$ は定積モル比熱である．

$$\delta Q = C_{\mathrm{V}} dT + p dV \tag{A}$$

（３）理想気体の準静的な断熱過程において，以下の式が成り立つことを示せ．

$$pV^{\gamma} = \text{（一定）}$$

ただし，$\gamma = C_{\mathrm{p}}/C_{\mathrm{V}}$ で，$C_{\mathrm{p}}$ は定圧モル比熱である．ここでは，$C_{\mathrm{V}}$ は定数とし，$C_{\mathrm{p}}$ との間に $C_{\mathrm{p}} = C_{\mathrm{V}}+R$ の関係が成り立つことを用いてよい．

（４）断熱とは限らない任意の準静的過程における理想気体のモル比熱を $C_{\mathrm{x}}$ と書くとき，以下が成り立つことを示せ．

$$pV^{f} = \text{（一定）} \tag{B}$$

ただし，$f = \dfrac{C_{\mathrm{x}} - C_{\mathrm{p}}}{C_{\mathrm{x}} - C_{\mathrm{V}}}$ とし，$C_{\mathrm{V}}, C_{\mathrm{p}}, C_{\mathrm{x}}$ はいずれも定数とする．

(5) 図1のように，理想気体1モルが入った容器があり，ピストンがバネによって押し込まれて平衡状態にある．ピストンが容器の右端の壁に接触したときに，バネは自然長であるとする．バネにはフックの法則が成り立つとして，バネ定数を $k$ とし，ピストンの断面積を $A$ とする．この系は恒温槽の内部にあり，その温度 $T$ は制御できるものとする．このとき以下の問いに答えよ．

ここで，バネ定数 $k$ の温度依存性や容器の熱膨張は無視してよく，ピストンにはバネの力と理想気体から受ける力だけが働くとしてよい．

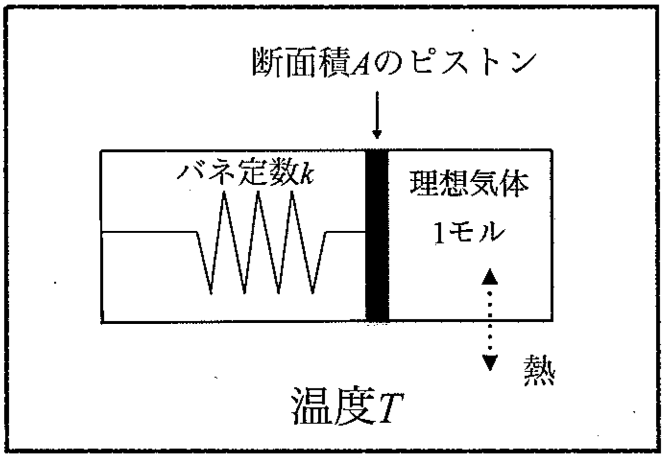


図1

(5-1) 温度 $T$ を準静的に変化させていくとき，系の物理量の関数で一定に保たれるものを示せ．

(5-2) 温度 $T$ で平衡状態になっているときの理想気体の圧力と体積をそれぞれ求めよ．

(5-3) この系の比熱が $C_V+R/2$ で与えられることを示せ．