

数 学

【第1問】

以下の問いに答えよ。途中経過も含めて解答すること。

- (1) 次の微分方程式の一般解を求めよ。ただし、 y は x の関数とする。

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 9y = 6e^{3x}$$

- (2) $u^2 + 4v^2 + 16w^2 = 16$ のとき、 $u + 2v + 4w$ の最大値を求めよ。ただし、 u 、 v 、 w は実数とする。

- (3) ある専攻の入学試験では、数学2題、物理学3題、化学2題、生物学2題、地球科学2題の計5科目11題から計4題を選択する。受験生Aが、各問題を他の問題とは独立に同じ確率で選択するとき、以下の問いに答えよ。

- (3-1) 受験生Aが数学2題と物理学2題の計4題を選択する確率を求めよ。

- (3-2) 受験生Aが4題とも異なる科目を選択する確率を求めよ。

- (4) 実数を成分とする行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ a & 3 & b \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

とする。Aの3つの固有値が同じ値 λ となる場合、 a 、 b 、 λ の値および固有ベクトルを求めよ。

数 学

【第2問】

(x,y) 平面上において、方程式

$$ax^2 - 2bxy + cy^2 = 1 \quad (\text{A})$$

で表される曲線について、次の問いに答えよ (a, b, c は実数の定数).

- (1) $b=0$ のとき、下記の各場合について、(A)の表す曲線を (x,y) 平面上に図示せよ. 図には x 軸, y 軸を示し, 切片がある場合にはその値を記入し, また, 漸近線がある場合には漸近線の式を記入せよ.

(1-1) $a > 0, c > 0$

(1-2) $a > 0, c < 0$

(1-3) $a < 0, c > 0$

- (2) 座標軸の角度 θ の回転

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

により (A) を x', y' で表したとき, $x'y'$ の係数が 0 となるための条件を a, b, c, θ で表せ.

- (3) (A) が閉曲線を表すとき, a, b, c が満たす条件を式で表せ.

- (4) (3) の条件を満たすとき, (A) で囲まれる面積を a, b, c で表せ.

次に、 (x,y) 平面上において、実数の変数 t を用い、方程式

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin(t + \alpha) \end{cases} \quad (\text{B})$$

で表される曲線を考える。ただし、 α は実数の定数で、 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ とする。

(5) 任意の t に対して (B) で表される (x,y) が (A) を満たすための a , b , c と α の関係を式で表せ。

(6) (B) で表される曲線で囲まれる部分の面積を α で表せ。