物　理　学

【第３問】

一様な剛体である球殻（質量 m，外半径 a，内半径 b）の運動について考える．図１のように地表面に球殻を置き，時刻 $t=0$ に打撃を加えたところ，真南の方向に重心の初速 V_0，仰角 β で打ち上がった．このとき球殻には力のモーメントも加わり，図１のように東西を軸とする角速度 $\omega_0\,(>0)$ の回転が与えられた．重力加速度 g は鉛直下向きで一様，空気抵抗は無視できるとして，以下の問いに答えよ．なお，一般の変数 $f(t)$ の１階及び２階の時間微分を，それぞれ $\dot{f}$，$\ddot{f}$ と表わす記法を用いよ．

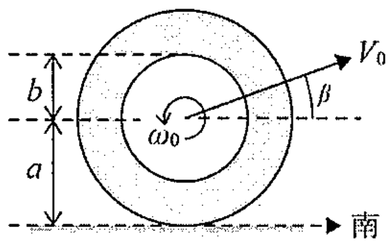


図 1

（1）　球殻の主慣性モーメント I に関する無次元量 $C \equiv ma^2/I$ を a と b で表せ．

（2）　球殻が $t=\tau$ に地面に落下したとき，鉛直方向には跳ね上がらなかったが，水平方向には運動量が保存されて，角運動量も変化しなかった．その後，地表面上を真南に向かって，摩擦を受けながらすべりつつ転がった．地面と球殻の間の動摩擦係数は μ であり，その他の摩擦は無視できるとする．なお，解答には問（1）の無次元量 C を用いてよい．

(2-1) 着地後（$t>\tau$）の球殻について，重心の速度の南向き成分を V，回転角速度の東向き成分を ω とする．V，ω の時間変化を表す２つの微分方程式を記せ．

(2-2) 球殻が地面に接する点の地面に対する速度（球殻がすべる速度）の南

向き成分を U とする． U を V と ω を用いて表せ．

(2-3) (2-1)，(2-2) の結果を用いて着地後の $U(t)$ を求めよ．

(2-4) $\beta=45°$，$\omega_0=(CV_0\cos\beta)/a$ の場合について，着地してからすべる速度が 0 になるまでの時間 T を求めよ．

(2-5) 前問の条件において，$t=\tau+T$ 以後の運動を，５０～１００字程度で理由を付して説明せよ（数式は字数に含めない）．

（３） 地球の自転の影響を考慮に入れて，打ち出された球殻が着地するまでの運動を考える．地球は北極を軸として角速度 Ω（定数）で自転しているとし，緯度は φ（北半球は $\varphi>0$）とする．遠心力や Ω の２次以上の効果は無視する．図２のように，球殻を打ち出す前の接地点を原点とし，地球に固定した直交座標系 O - $x_1x_2x_3$ を用い，$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3$ を座標軸に固定された単位ベクトルとする．

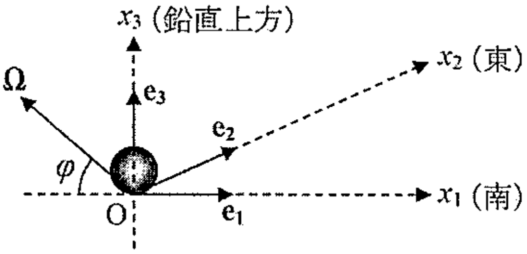


図２

(3-1) 球殻の重心座標 X_1, X_2, X_3 の時間変化を表す３つの微分方程式を記せ．
必要なら，地球の自転の角速度ベクトルを $\mathbf{\Omega}$ とするとき

$$\dot{\mathbf{e}}_k(t)=\mathbf{\Omega}\quad \mathbf{e}_k(t)\ \ (k=1,2,3)$$

が成立つことを用いてよい．

(3-2) $\Omega=0$ のときの解を X_i^0 $(i=1,2,3)$ とすると，前問の解が

$$X_i(t)=X_i^0(t)+\quad X_i^1(t)$$

と書けることを用いて，$X_2(t)$ を求めよ．また，$g=10\ \mathrm{m/s^2}$，$V_0=70\ \mathrm{m/s}$，$\beta=45°$，$\varphi=45°$，$\Omega=7\times10^{-5}\ \mathrm{rad/s}$ のとき，球殻の着地点が真南からずれる向きと量を有効数字１桁まで求めよ．

物　理　学

【第４問】

電位を持つ導体およびその導体を通る電流が作り出す電磁場と，その場の中の正イオンの運動に関する以下の問いに答えよ．

問題で与えられた導体以外の空間は真空（透磁率μ_0，誘電率ε_0）とし，与えられた電位・電流で作られる以外の電磁場は考慮しなくてよい．導体の電気抵抗は非常に小さく，電流方向の電位差は無視する．以下に示す円柱座標系 (r, θ, z) におけるベクトル演算の式を用いてよい．

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial r},\ \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta},\ \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \qquad \nabla\bullet A = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z},\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r},\ \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

（1）　図１のように，無限に広い板状導体２枚を，z 軸に垂直に置く．それぞれの導体に，逆向きで（$0 < z < a$ は$+x$ 方向，$b < z < c$ は$-x$ 方向），大きさが等しい電流（y 方向の単位幅あたり I ）を一様に流す．このとき，磁場ベクトル（H_x, H_y, H_z）を求めよ．z について領域に分け，それぞれ答えること．

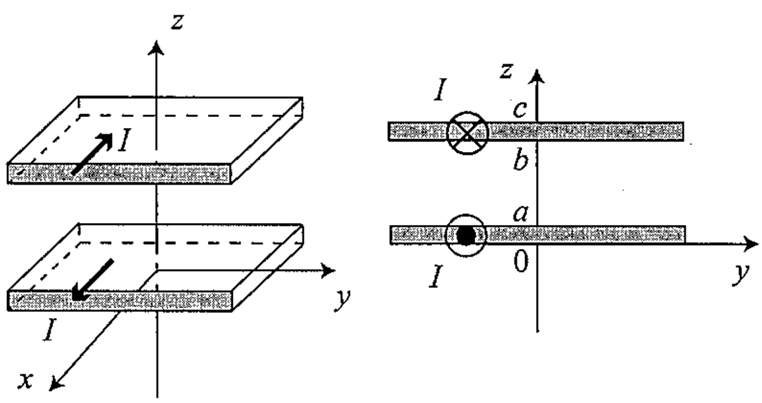


図１．（右パネルは，x 軸に直交する断面の図）

（2）　図２のように，無限に長い，円柱状導体（半径 a ）と円筒状導体（内半径 b，外半径 c ）を軸が共通になるように置き，円柱座標 (r, θ, z) をとる．逆向きで（円柱状導体には $+z$ 方向，円筒状導体には $-z$ 方向），大きさが等しい電流（大きさ J ）を一様に流す．また，円筒状導体の電位を 0 に，円柱状導体の電位を V とする．

(2-1) 中心軸から半径 r $(a<r<b)$ の位置での磁場ベクトル (H_r, H_θ, H_z) を求めよ．

(2-2) 中心軸から半径 r $(a<r<b)$ の位置での電場ベクトル (E_r, E_θ, E_z) を求めよ．

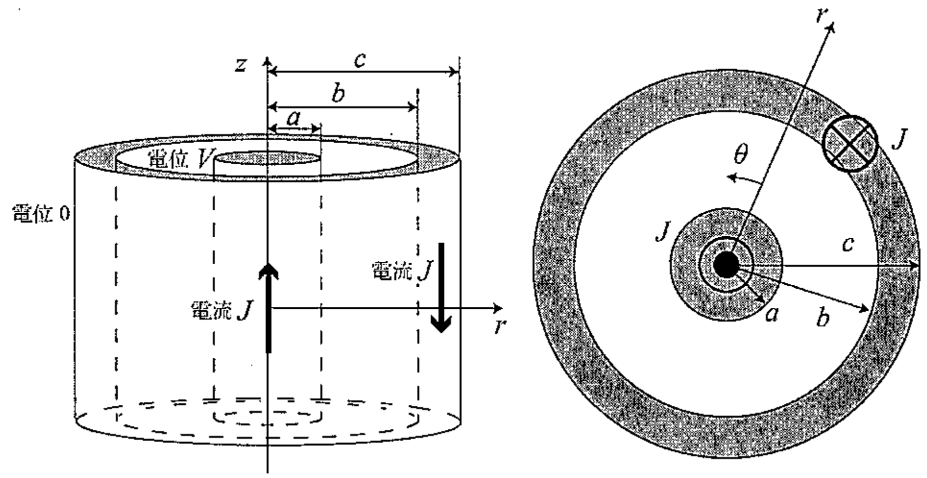


図２（右パネルは，z 軸に直交する断面の図）

（3）　問（2）と同じ設定（導体の半径 a, b, c とその配置，電流 J, 電位 V）のもとで，電荷 q (>0)，質量 m の正イオンの運動を考える．正イオンの運動速度は光速より十分小さく，またその作る電磁場は弱いとして無視する．

(3-1) 電位 $V=V_1$ とすることで，正イオンが，中心軸から一定距離 r_0 $(a<r_0<b)$ かつ z 軸に平行な直線上を，速度 $v_r=0$，$v_\theta=0$，$v_z=v_{z0}$ で等速直線運動できる（図３）．このときの V_1 を求めよ．

(3-2) 電位 $V=V_2$ とすることで，正イオンが，z 軸に垂直な面内で一定半径 r_0 $(a<r_0<b)$ の円周上を，速度 $v_r=0$，$v_\theta=v_{\theta 0}$，$v_z=0$ で等速円運動できる（図４）．このときの V_2 を求めよ．

(3-3) 電位 $V=V_3$ とすることで，正イオンが，一定半径 r_0 $(a<r_0<b)$ の面内を速度 $v_r=0$，$v_\theta=v_{\theta 0}$，$v_z=v_{z0}$ の等速でらせん運動できる（図５）．

このときの V_3 を求めよ．

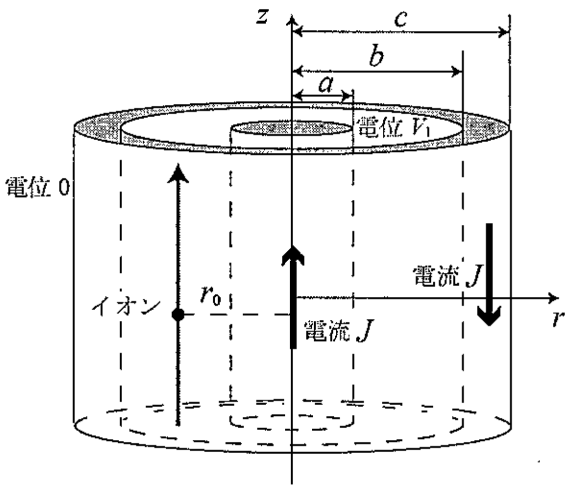


図３

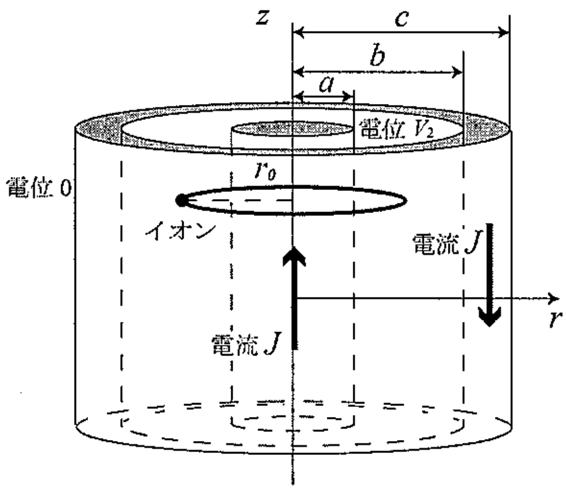


図４

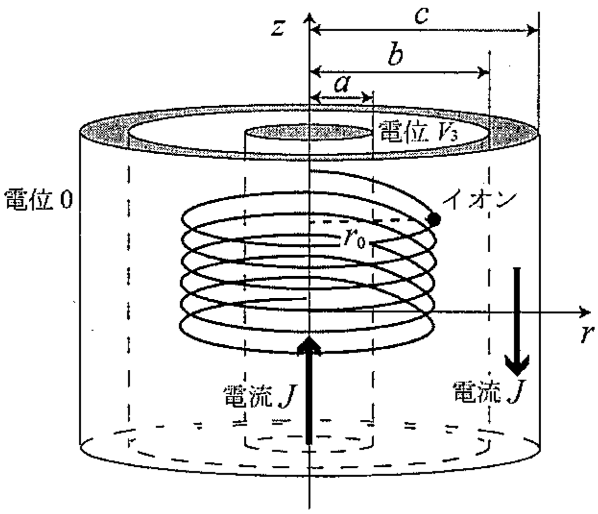
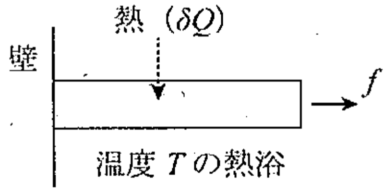


図５

物 理 学 / 化 学

【第５問】

下図のような棒状の物体を考える．一端を壁に固定し，もう片方の端を引っ張って伸ばせるものとする．引っ張る力を f とし，物体の自然長からの伸びを l とする（$f=0$ で $l=0$）．特に指定されない限り，物体は温度 T の熱浴に接しているものとする．また，塑性変形は起こらないものとする．



（１）　物体を力 f で引っ張り，伸びが l の状態で平衡にあるとする．そこから力を微小量 df だけ増やし，伸びが微小量 dl 増える過程を考える．

(1-1) この過程における内部エネルギー変化を dU，物体が熱浴から吸収した熱量を δQ とするとき，熱力学第一法則を式で記せ．ただし，物体の体積変化に対して環境の圧力がする仕事は無視できるものとする．また，微小量の２次以上の積は無視する．

(1-2) 物体のエントロピー変化 dS と吸熱量 δQ との間に成り立つ関係式を書き，等号が成立するためにはどのように引っ張ればよいかも記せ．

（２）　エントロピー S を温度 T と伸び l の関数とし，$S(T,l)$ は全微分可能とする．

(2-1) 以下の関係式を示せ．

$$\left(\frac{\partial T}{\partial l}\right)_S = -\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial l}\right)_T}{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_l} \qquad \text{(A)}$$

(2-2) $T\left(\dfrac{\partial S}{\partial T}\right)_l$ の物理的意味を述べよ．一般的に，この量は負にはならないが，もし負であるとするとどのようなことが起こるか，５０字～１００字程度で説明せよ．

(2-3) 物体の内部エネルギーを U とするとき，以下の関係式を示せ．

$$\left(\frac{\partial U}{\partial l}\right)_T = f - T\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_l \qquad \text{(B)}$$

（３） この物体がゴムでできているとしよう．伸び l が小さく，温度が室温程度のとき，力 f は $f=cTl$ と表されることが実験から知られている（c は T や l に依存しない定数）．この物体を $l=0$ から準静的に引っ張っていくときに起こる現象に関して，以下の問いに答えよ．ここでは式（A）と式（B）を用いてよい．

(3-1) この物体の内部エネルギー U は，伸び l に依存しないことを示せ．

(3-2) 力 f は以下の式で与えられることを示せ．

$$f = -T\left(\frac{\partial S}{\partial l}\right)_T$$

(3-3) 引っ張っていく過程で物体のエントロピーは増加するか，それとも減少するか．理由とともに答えよ．

(3-4) $l=0$ の状態で熱浴を取り去る．それから断熱状態で物体を引っ張っていくと，物体の温度は上昇するか，それとも下降するか．理由とともに答えよ．