数　学

【第１問】

以下の問いに答えよ．途中経過も含めて解答すること．

（１）次の行列Aの固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

（２）xy 平面上の点 P の位置(x,y)が，時間 t に関する以下の微分方程式に従うとする．ただし，λは正の実定数である．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=(\lambda-x^2-y^2)x-y \\ \dfrac{dy}{dt}=x+(\lambda-x^2-y^2)y \end{cases}$$

(2-1) 極座標(r,θ)を

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

によって導入する時，$r(t)$と$\theta(t)$の満たす微分方程式を導け．

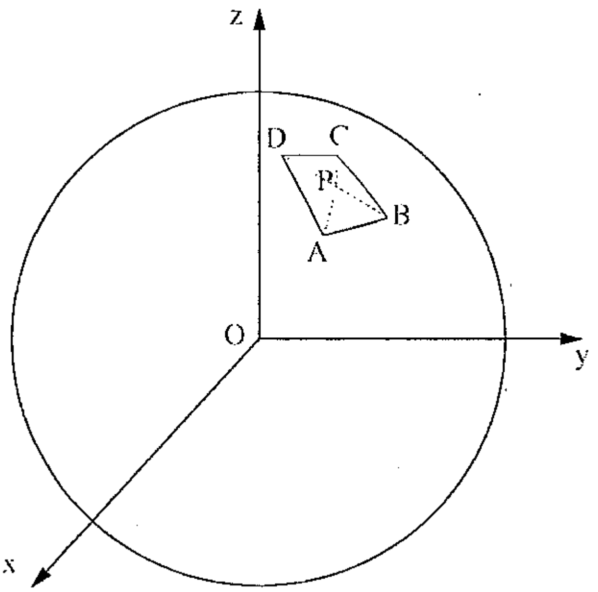
(2-2)　(2-1) で求めた微分方程式を解き，$r(t)$と$\theta(t)$を求めよ．ただし，$r(0)=r_0>\sqrt{\lambda}>0$，$\theta(0)=0$とする．

（3）複素数$z=x+iy$（x,y は実数）を独立変数とする複素関数$w=f(z)$の実部を$u(x,y)$，虚部を$v(x,y)$とする．ここで，iは虚数単位である．

(3-1)　$v=x^3-axy^2+2y$が調和関数となるためのaの値を求めよ．

(3-2)（3-1）で求めたaの値に対して，vを虚部とする正則関数wを求めよ．ただし，正則な複素関数の実部と虚部はコーシー・リーマンの方程式を満たすことを用いてもよい．

（4）原点 O を中心とした半径 1 の球面を考える．球面上の 4 点 A，B，C，D が図のような球面四角形を成すとき，大円に沿って A と C，B と D をそれぞれ結ぶ測地線$\overset{\frown}{AC}$と$\overset{\frown}{BD}$の交点 P の位置ベクトルを$\overrightarrow{OP}$とする．$\overrightarrow{OP}$を A，B，C，D の位置ベクトル$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$を用いて表せ．



【第２問】

以下の問いに答えよ．途中経過も含めて解答すること．

（１）６つの面にそれぞれ「１」から「６」の数字が書かれたサイコロがある．このサイコロには細工がしてあり，「２」から「５」の数字が出る確率は等しいが,「６」が出る確率は「２」が出る確率の２倍,「１」が出る確率は「２」が出る確率の３倍である．このようなサイコロを６個同時に振るとする．以下の３つの事象について，それぞれが起こる確率を求めよ．

(1-1)「１」から「６」の数字が１個ずつ出る．

(1-2) ２つの数字が３個ずつ出る．

(1-3) １つの数字が２個出て，残り５つの数字のうち４つの数字が１個ずつ出る．

（２）$y>0$ のとき，積分 $I(y)=\int_0^\infty \frac{\sin yx}{x(a^2+x^2)}dx$ （a は定数で $a>0$）について，以下の問いに答えよ．

(2-1) $\frac{d^2I}{dy^2}-a^2I$ を計算し，I が満たす微分方程式を導け．ただし，

$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$であることを用いてよい．

(2-2) $\lim_{y\to 0} I$ および$\lim_{y\to 0}\frac{dI}{dy}$ を求めよ．

(2-3) (2-1) で導いた微分方程式を解くことにより積分 I を求めよ．ただし，(2-2) で求めた条件を課すものとする．