物理学・地球惑星物理学

【第３問】

図のように，半径 a，質量 M の一様な円柱に，円柱の中心軸から距離 b の位置に質量 m の大きさが無視できるおもりを貼り付けた物体を考える．物体を水平な床の上に置き，おもりが床に最も近くなる位置にあるときを基準とする．床に沿って x 軸をとり，物体は x 軸に沿ってころがるとする．物体の運動について以下の問いに答えよ．なお，円柱は床の上をすべらないものとし，重力加速度は g とする．

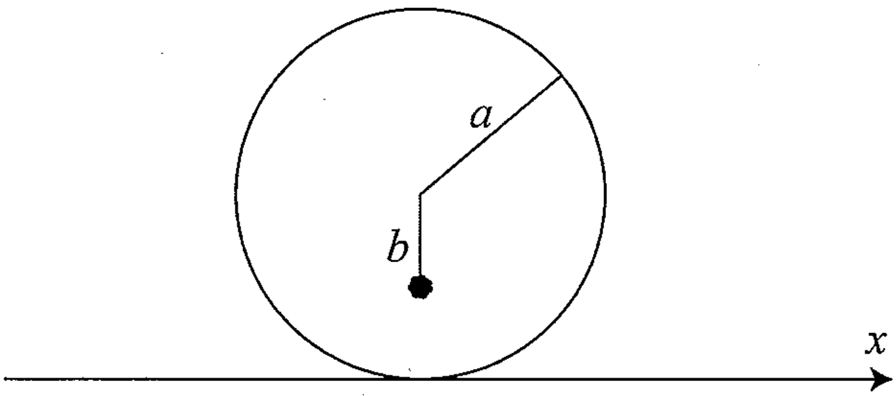
（１） この物体が持つ，円柱の中心軸のまわりの慣性モーメントを求めよ．

（２） 物体が基準の位置から角度 θ だけ回転した時のポテンシャルエネルギーを求めよ．ただし基準の位置にあるときのポテンシャルエネルギーを０とする．

（３） 物体が基準の位置から角度 θ だけ回転した時の物体の運動エネルギーを，角度 θ 及び角速度 $\dot{\theta}$ の関数として表せ．

（４） 基準の位置にある物体に角速度 $\dot{\theta}_0$ を与えて x 方向にころがす． 物体が x 方向にころがり続けるための $\dot{\theta}_0$ の条件を求めよ．

（５） 基準の位置から物体を少し回転させた状態で静止させ，静かに手を放すと，物体は振動を始める．振動の振幅は微小であるとして，振動の角振動数 ω を求めよ．



物理学・地球惑星物理学

【第４問】

（１）　導体内を流れる電流について考える．図１のような断面積 S で無限に長い円柱状の導体内に，自由電子（電荷 $-e$，ただし $e>0$）が単位体積あたり n 個含まれているとする．導体の長さ方向に電場 $\mathbf{E}$ を加えたところ，自由電子は平均速度 $\mathbf{v}$ で移動した．真空の誘電率を ε_0 として，以下の問いに答えよ．なお，荷電粒子の速さは光速度より十分小さいとする．

(1-1) 電流密度 $\mathbf{J}$ を，e，n，ε_0，$\mathbf{E}$，$\mathbf{v}$ のうち適切なものを用いて表せ．

(1-2) 自由電子の平均速度は，易動度 μ を用いて $\mathbf{v}=\mu\mathbf{E}$ と表される．このときの電流密度 $\mathbf{J}$ と電場 $\mathbf{E}$ の関係を式で表せ．また，この導体の単位長さあたりの電気抵抗を求めよ．

(1-3) 銅は $1\mathrm{m}^3$ あたり 8.4×10^{28} 個の自由電子を含んでいる．断面積 $1.0\mathrm{mm}^2$ の銅線に 1.0A の電流を流した場合の自由電子の平均速度の大きさ $|\mathbf{v}|$ を有効数字２桁で求めよ．なお，e の値は 1.6×10^{-19} C とする．

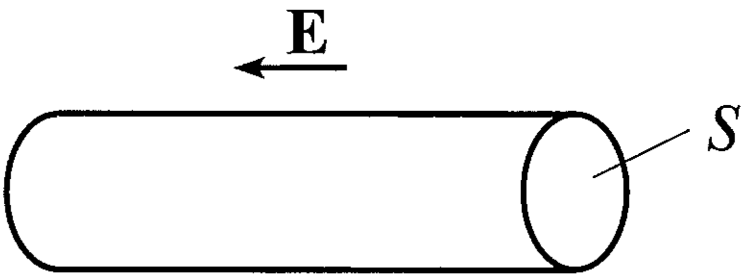


図１

（2）　図２のような直交座標系をとり，y 方向に無限に長い導体を考える．この導体に一様な電場 $\mathbf{E}=(0,E_y,0)$ を加え，導体内の荷電粒子（電荷 q）による電流密度 $\mathbf{J}$ の電流を生じさせた．その後，さらに一様な磁束密度 $\mathbf{B}=(0,0,B_z)$ の磁場を加えた．ただし E_y と B_z は正の定数とする．

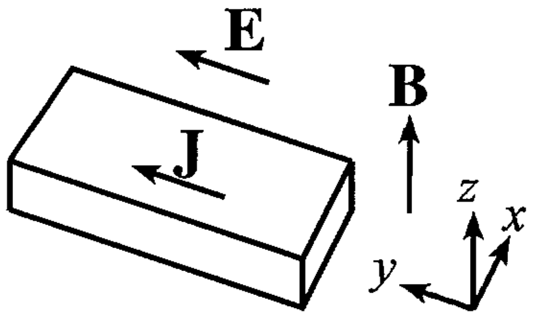
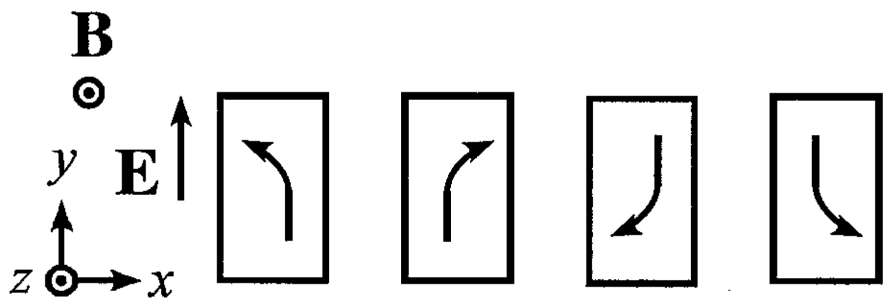


図２

(2-1) 磁場を加えた直後の荷電粒子の動きはどのようになるか．荷電粒子の電荷 q が正の場合と負の場合それぞれについて，下記の（a）～（d）から荷電粒子の動きを表す矢印の向きが正しい図を選べ．



（a）　（b）　（c）　（d）

(2-2) 磁場を加えてしばらくすると荷電粒子の分布が偏り，それによって導体内に x 軸に平行な電場 $\mathbf{E}'$ が生じる．電荷 q が負の場合，この電場の向きを答えよ．また，荷電粒子に加わるローレンツ力を考えることにより，電場 $\mathbf{E}'$ の x 成分 E'_x を，荷電粒子の電荷 q，荷電粒子密度 n，電流密度の大きさ $|\mathbf{J}|$，磁束密度の z 成分 B_z を用いて表せ．

（3）　無限に長い直線に沿って一定の電流 I が流れている．電流素片 $I d\mathbf{s}$（$d\mathbf{s}$ は電流の方向をもつ微小長さベクトル）によって，電流素片からの位置ベクトルが $\mathbf{r}$ の点に生じる磁場の磁束密度 $d\mathbf{B}$ は

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(I d\mathbf{s} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right)$$

で与えられる．ただし，μ_0 は真空の透磁率，$r = |\mathbf{r}|$ である．電流素片によって生じる磁場を積分することにより，直線からの距離 a における磁束密度の大きさを求めよ．

物理学・地球惑星物理学

【第５問】

海洋プレートが，海底拡大軸（中央海嶺）で生成された後，時間とともに冷えていく過程を表すモデルとして，均質な一次元半無限体の冷却（図１）を考える．

熱拡散方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

$T(z,t)$：温度，t：時間，z：深さ

κ：熱拡散率（定数）

を，初期温度分布 $T(z,0) = T_{\mathrm{m}}$, $t > 0$ で $T(0,t) = 0$, $T(\infty,t) = T_{\mathrm{m}}$ という条件で解くと，時間 t における温度分布は

$$T(z,t) = T_{\mathrm{m}} \operatorname{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{\kappa t}}\right) \qquad (\mathrm{I})$$

となる．ここで，$\operatorname{erf}(x)$は誤差関数

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-y^2) dy$$

である．

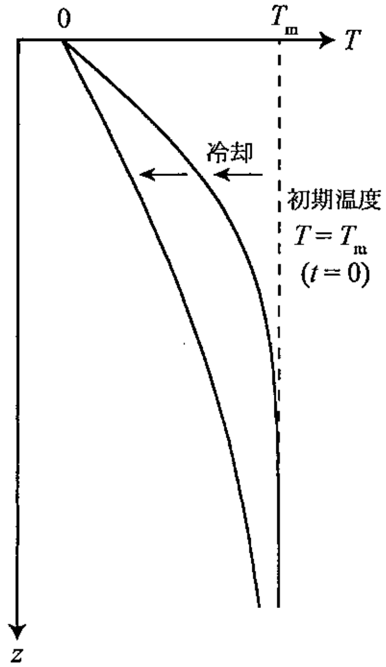


図１

海洋プレートが生成されてからの時間（年齢）t における温度構造は（Ｉ）式で表されるものとして，以下の設問に答えよ．

（１）　海洋プレート内の温度がある値 T_1（$0 < T_1 < T_{\mathrm{m}}$）となる深さは，年齢 t に対してどのように変化するか．数式を用いて説明せよ．

（２）　海洋プレート表面における熱流量（単位時間・単位面積あたりの鉛直方向の熱の流れ）q は，年齢 t の平方根に反比例し，定数 C_q を用いて

$$q(t) = \frac{C_q}{\sqrt{t}} \qquad (\mathrm{II})$$

と表されることを示せ.

（3）　地球上の海洋プレート全体について年齢の分布を調べると，年齢に対して面積がほぼ直線的に減少している．この関係は，年齢が t 以下である面積を $A(t)$ とすると，定数 C_A 及び $t_{\max}$ を用いて

$$\frac{dA(t)}{dt}=C_A\left(1-\frac{t}{t_{\max}}\right) \qquad (\mathrm{III})$$

と表すことができる（図２）．$C_A = 3.0\times10^6\ \mathrm{m^2\ yr^{-1}}$，$t_{\max} = 1.8\times10^8$ yr であるとして，地球上の海洋プレート表面からの熱放出量の総計 Q を，W を単位として求めよ．また，海洋プレート全体についての熱流量の平均値を，$\mathrm{W\ m^{-2}}$ を単位として求めよ．ただし，（II）式の定数 C_q の値は $5.0\times10^2\ \mathrm{W\ m^{-2}\ (yr)^{1/2}}$ とし，必要に応じて $\sqrt{2}=1.41$，$\sqrt{3}=1.73$，$\sqrt{5}=2.24$ を用いよ．

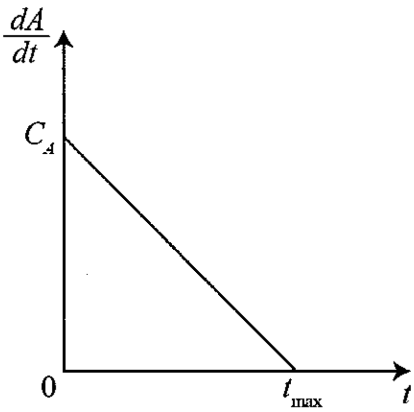


図２

（4）　海洋プレートが生成される速度が変化すると，表面からの熱放出量の総計も変化する．海洋プレートの総面積は一定で，年齢と面積の関係も（III）式の形を保つ（C_A と $t_{\max}$ の値のみが異なる）ものとする．プレートの生成速度が（3）の 2 倍である場合，全海洋プレートから放出される熱量の総計を（3）の Q を用いて表せ．

（5）　海洋プレートが時間とともに冷えていくのに対し，大陸地域の大部分では地下温度構造は定常状態にあり，一次元熱伝導の式

$$\frac{d}{dz}\left(k\frac{dT(z)}{dz}\right)+H(z)=0$$

に従うと考えられる．k は熱伝導率，H は単位体積・単位時間あたりの発熱量である．大陸地域においては，表層近傍の放射性元素の崩壊による発熱が，熱源として重要である．発熱量の深さ分布が

$$H(z)=\begin{cases}H_s\left(1-\dfrac{z}{D}\right) & (0\leq z\leq D)\\ 0 & (z>D)\end{cases}$$

である場合について（H_s，D は定数），深さ D における熱流量を，H_s，D，地表面における熱流量 q_s を用いて表せ.

物理学・地球惑星物理学／化学

【第６問】

１モルの気体からなる系について，絶対温度を T, 圧力を P, エントロピー S の微小な変化を dS, 内部エネルギー U の微小な変化を dU, 体積 V の微小な変化を dV, 系が吸収した微小な熱量を δQ, 気体定数を R とする．また，偏微分を $\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)_Y$ と表記した場合，右下添字の Y は，Y が一定に保たれた偏微分であることを意味する．

（１）　可逆過程においては，$\delta Q = TdS$ とおけるから，熱力学の第一法則は，仕事が気体の膨張（収縮）による仕事のみの場合，

$$\delta Q = TdS = dU + PdV \qquad (\mathrm{I})$$

と表すことができる．以下の問いに答えよ．

(1-1)　体積一定の条件のもとでの理想気体１モルあたりの定積比熱を C_V, 圧力一定の条件のもとでの理想気体１モルあたりの定圧比熱を C_P とする．このとき，C_P と C_V の間には，マイヤーの関係式，

$$C_P = C_V + R$$

が成り立つことを証明せよ．ただし，理想気体の内部エネルギー U は温度のみの関数であると仮定せよ．

(1-2)　理想気体ではない一般の気体の場合，内部エネルギー U は T および V の関数として取り扱う必要がある．このとき次式が成り立つことを証明せよ．

$$C_P - C_V = \left\{\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right\}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

ヒント：内部エネルギー $U(T, V)$ を全微分の形で表してみよ．

（2）　実在気体の内部エネルギーを $U(T,\ V)$とする．$\left(\dfrac{\partial U}{\partial V}\right)_T$ を実測可能な量から推定することを考える．可逆過程の場合について以下の問いに答えよ．

(2-1)　マックスウェルの関係式のひとつである次式を導け．

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

ヒント：　ヘルムホルツの自由エネルギー $F = U - TS$ の全微分から $\left(\dfrac{\partial F}{\partial V}\right)_T$，$\left(\dfrac{\partial F}{\partial T}\right)_V$ の表式を求めよ．(Ｉ)式を使ってよい．

(2-2)　(Ｉ)式を書き換えた

$$dU = TdS - PdV$$

を温度一定の条件で変形して，エネルギー方程式とよばれる次の式を導け．

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P$$

必要に応じて，(2-1)で求めたマックスウェルの関係式を用いよ．

（3）　実在気体をよく近似すると考えられているファン・デル・ワールスの状態方程式は，１モルの気体に対して次のように書ける．

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \qquad (a, b\text{は定数})$$

この状態方程式を満たす気体の内部エネルギー$U(T,\ V)$を以下のような順序で求めよ．

(3-1)　(2-2)のエネルギー方程式を用いて，この気体に対する$\left(\dfrac{\partial U}{\partial V}\right)_T$ を求めよ．

(3-2)　内部エネルギー$U(T,\ V)$を全微分の形で表し，(3-1)の結果を用いて，

この気体の内部エネルギー$U(T,\ V)$を求めよ．ただし，$T=T_0$，$V=V_0$での内部エネルギーをU_0とする．気体１モルあたりの定積比熱C_Vは一定であるとしてよい．