

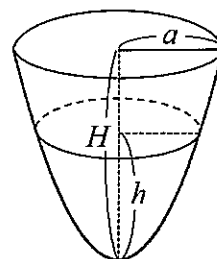
## 数 学

### 【第1問】

以下の問いに答えよ。途中経過も含めて解答すること。

(1)  $1+i$ の $n$ 乗根をすべて求めよ。但し、 $i$ は虚数単位、 $n$ は正の整数である。

(2) 下図のような、上底面の半径が $a$ 、深さ $H$ の、回転放物面を側面として持つ容器がある。この容器を頂点が下になるようにし、単位時間あたり体積 $v$ の水を入れるとする。



(2-1) この容器の体積を求めよ。

(2-2) 水面の高さが $h(<H)$ の時の、水面の上昇速度を求めよ。

(2-3) 水を入れ始めてから時間 $t$ が経過した時の水面の上昇速度を求めよ。

(3) 経路積分を用いて以下の積分を $t>0$ の場合と $t<0$ の場合に分けて評価せよ。但し、 $t$ は実数、 $\omega_0$ 及び $\varepsilon$ は正の実数であり、 $i$ は虚数単位である。

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\omega - 2i\varepsilon}{\omega^2 - 2i\varepsilon\omega - (\omega_0^2 + \varepsilon^2)} e^{i\omega t} d\omega$$

(4) 6つの面にそれぞれ1, 2, 3, 3, 4, 4という数字が書かれた立方体のサイコロを考える。なお、このサイコロの各面の出る確率は同じである。このようなサイコロ9個を同時に振ったとき、異なる3種類の数字がそれぞれ3個ずつ出る確率を求めよ。

## 数 学

### 【第2問】

次の行列  $A$  に関する以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

- (1) 固有値を求めよ.
- (2) 各固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.
- (3) 行列  $A$  に対し, 適当な  $3 \times 3$  の正則行列  $B$  をとると,  $B^{-1}AB$  が対角行列になる. 対角行列と行列  $B$  及び行列  $B^{-1}$  を求めよ.
- (4) 微分方程式

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = A\vec{p}(t)$$

の一般解を求めよ. 但し,

$$\vec{p}(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{pmatrix}$$

とする.