物　理　学

【第３問】

物体の衝突と分離に伴う運動の変化に関する以下の問いに答えよ．

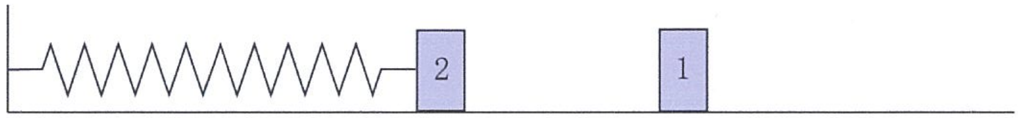
（１）質量 M の静止している物体（物体 1）に，質量 m の物体（物体 2）が衝突してめり込み，衝突後はふたつの物体が一体になって運動する場合について，以下の３つの問いにそれぞれ答えよ．なお，物体 2 は物体 1 の重心に向かって衝突し，重心まわりの回転は生じないとする．また，ふたつの物体の大きさは以下に現れる l, d に比べて無視できるとする．

(1-1) ふたつの物体に衝突以外の力が作用せず，物体 2 は速度 v で衝突する場合を考える．この場合の，衝突後の運動速度と，衝突によって失われる運動エネルギーを求めよ．

(1-2) ふたつの物体に重力が作用し，物体 1 は長さ l の糸でつり下げられている場合を考える．物体 2 が物体 1 に水平に衝突した結果，衝突後に糸は鉛直方向から角度 α をなすところまで動いた．この場合の，物体 2 の衝突直前の速度を求めよ．なお，糸は常にまっすぐ張っており，糸の質量は無視できるとする．また，重力加速度は g とする．

(1-3) 図 1 のように，物体 2 は一端を壁に固定したばねにつながれており，ばねが自然長のときに物体 1 と物体 2 は（ばねが伸びる方向に）距離 d だけ離れている場合を考える．このばねは自然長からの変位に比例した復元力を生じ，その比例係数（ばね定数）を k とする．物体と床の間の摩擦は無視できるものとし，ふたつの物体には衝突とばねの復元力以外の力は作用しないとする．時刻 $t = 0$ において，ばねは自然長に対して D（ただし $D > d$）だけ押し縮められており，物体 2 の速度は 0 である．この場合について，$t > 0$ におけるばねの自然長からの変位を時刻の関数として求めよ．ばねの伸びる方向を正とする．なお，$\omega = \sqrt{k/m}$ および $\Omega = \sqrt{k/(m+M)}$ で定義される ω と Ω を用いて解答してよい．また，衝突時刻 T および衝突直後の速度 V を求めておき，それらを解答中で用いてよい．

図１



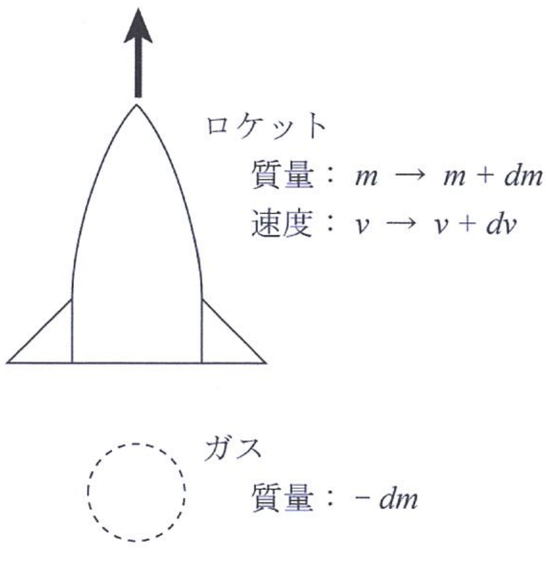
（２）重力の作用のもと，地上に静止していたロケットが時刻 $t=0$ にガスを鉛直下方に噴出し始め上昇していく場合について，以下の３つの問いに答えよ．時刻 $t=0$ におけるロケットの質量を m_0 とする．噴出されるガスのロケットに対する相対速度は一定であり，a で表される（$a>0$）．重力加速度は g で一定であるとする．

(2-1) ある時刻におけるロケットの質量を m，上昇速度を v とすると，微小時間 dt の間に，ロケットの質量は $m+dm$ に微小変化し（$dm<0$），上昇速度は $v+dv$ に微小変化する（図２参照）．この微小時間の間の全運動量 p（ロケットと噴出されたガスを合わせたもの）の微小変化 dp を dm, dv を用いて表せ．ただし，微小量の２次以上の積は無視する．

(2-2) 噴出されるガスの単位時間あたりの質量が一定値 μ（$\mu>0$）である場合，(2-1) に基づき，ロケットの上昇速度の時間変化を表す式（運動方程式）を書け．

(2-3) ガスの噴出が続いている間の，ロケットの上昇速度を時刻の関数として求めよ．

図２



物　理　学

【第４問】

図１のように，円筒形の導体が中心軸を一致させた状態で真空中に置かれている．内側の円筒Ａの半径をa，外側の円筒Ｂの半径をbとする．円筒Ａは接地され，円筒Ｂには電圧V（>0）が与えられている．真空の誘電率をε_0として，以下の問いに答えよ．なお，荷電粒子の速さは光速度より十分小さいとし，導体の端の効果は無視する．

（１）　図２は中心軸に垂直な面における断面図である．原点を中心軸とし，中心軸からの距離を$r=\sqrt{x^2+y^2}$とする．$a<r<b$の領域における電場ベクトル$\vec{E}$の様子を矢印で示せ．なお，解答用紙には図２右下に示すような簡略な図を描いて矢印を記入すればよい．

（２）　r（$a<r<b$）の位置での電場の大きさ$E(r)$が下記の式で表されることを示せ．ただし，ln は自然対数を表す．

$$E(r)=\frac{V}{\ln(b/a)}\cdot\frac{1}{r}$$

（３）　円筒Ａから負電荷$-e$（$e>0$）を持つ質量mの荷電粒子が初速０で放出された．この粒子のrの位置（$a<r<b$）における運動方程式を記せ．

（４）　（３）で求めた運動方程式の両辺に速度$\dot{r}$（$=dr/dt$）を乗じて積分することにより，rの位置（$a<r<b$）における荷電粒子の速度を求めよ．

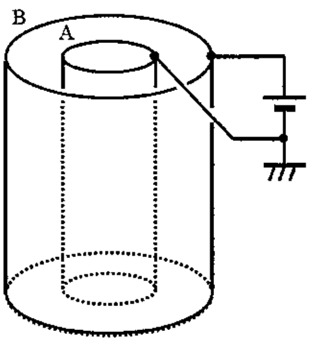


図１

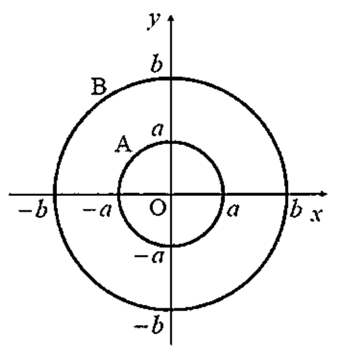
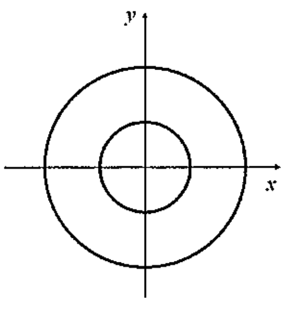


図２



解答用の簡略図

つぎに，中心軸に平行に，大きさB（>0）の一様な磁場を，図３に示された向き（紙面裏から表の向き）に加え，円筒Ａ上の$\mathrm{P}(a,0)$から，負電荷$-e$（$e>0$），質量mの荷電粒子を初速０で放出した．

（５）　磁場の大きさBが時間変化しない時，粒子は円筒Ｂに到達した．円筒Ａから放出された後の運動のようすが定性的にわかるように，荷電粒子の軌跡を矢印で示せ．解答用紙には図３右下に示すような簡略な図を描いて矢印を記入すればよい．

（６）　（５）の粒子の位置が$\mathrm{Q}(x,y)$，速度が$\vec{v}=(\dot{x},\dot{y})$のときの運動方程式を記せ（$a<\sqrt{x^2+y^2}<b$）．ただし，電荷$q$，速度$\vec{v}$の荷電粒子が電場$\vec{E}$および磁場$\vec{B}$から受けるローレンツ力$\vec{F}$は，$\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$で与えられる．

（７）　（５）の粒子の位置が$\mathrm{Q}(x,y)$のときの粒子の運動エネルギー$U=\dfrac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)$を求めよ．

（８）　$\mathrm{P}(a,0)$から粒子を放出した後，磁場の大きさをうまく時間変化させたところ，粒子は最終的に大きさB_0のもとで原点を中心とした半径r_0（$a<r_0<b$）の円運動をした．B_0をr_0を用いて表せ．

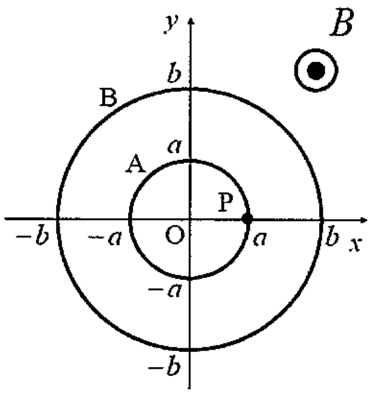
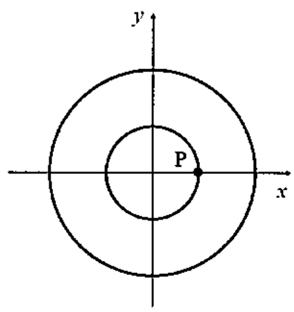


図３



解答用の簡略図

物 理 学 / 化 学

【第５問】

熱力学の第一法則はエネルギー保存の法則であり

$$dU = \delta Q + \delta W \qquad \text{(A)}$$

となる．ここで dU は系の内部エネルギー U の微小な変化，δQ は系が吸収した微小な熱量，δW は系が系外から受けた微小な仕事である．

また熱力学の第二法則から，任意の熱力学的サイクルでは，クラウジウスの関係式

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$

が成立する．ただし，サイクルに沿って系は複数の熱源から熱量を吸収するものとし，熱源の絶対温度を T で表す．積分はサイクルに沿って行われ，等号はサイクルが可逆過程の場合に成立する．以下の問いに答えよ．

（１） 状態１から状態２に移行した時のエントロピーの変化 ΔS は，状態１と状態２を通る可逆過程に沿って以下の積分を行うことによって得られる．

$$\Delta S = \int_{\text{状態1}}^{\text{状態2}} \frac{\delta Q}{T}$$

クラウジウスの関係より，ΔS が状態１，２を通る任意の可逆過程において同じ値になることを示せ．図を使って説明してもよい．このことはエントロピーが状態によって決まる量であることを意味する．

（２） 状態１から状態２まで断熱非可逆的に変化した時のエントロピー変化 ΔS が正であることを示せ．図を使って説明してもよい．

系外から行われた仕事 δW は，ゆっくりと可逆的に行われるとすれば系の外と内の圧力 P が同じと考えられるので $\delta W = -PdV$（dV は系の体積 V の微小な変化）となる．また，可逆過程のもとでは（１）より $\delta Q = TdS$ となるので，式 (A) から

$$dU = TdS - PdV \qquad \text{(B)}$$

を得る．この関係は，変数のすべてが状態量で表されているので非可逆過程においても成立する．以下の問いに答えよ．

（３）　ヘルムホルツの自由エネルギーFは

$$F = U - TS$$

と定義され，状態変数の一つである．式（B）とFの定義式により，Fの微小変化に関して式（B）と同様な関係式が得られる．この関係式と，独立な状態変数の数は２であることを利用して，以下のマクスウェルの関係式を導け．

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T$$

以下の問いにおいては，系は１モルの理想気体から構成されているものとし，気体定数をRとする．

（４）（３）で得られたマクスウェルの関係式を利用して，理想気体の内部エネルギーUは温度一定のもとでは体積Vによらないことを示せ．

（５）　断熱壁で囲まれた箱の中で，体積V_1，温度T_1の理想気体が，自由膨張により真空中に広がり，体積V_2，温度T_2になった．この時の温度T_2とエントロピー変化ΔSを，T_1，V_1，V_2により表せ．答えのみでなく導き方も記すこと．