数　学

【第１問】

以下の問いに答えよ．途中経過も含めて解答すること．

（１）　n次の正方行列$\mathbf{A}$が固有値λとそれに対応する固有ベクトル$\mathbf{x}\ (\neq \mathbf{0})$を持ち，$\mathbf{A}^3 = -\mathbf{A}$を満たしている．$\lambda$の値を求めよ．

（２）　Legendre 関数$P_n(z)$（$n = 0, 1, 2, \cdots$）の母関数$F(h, z)$は

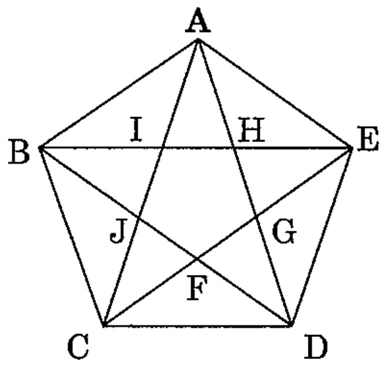
$$F(h, z) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2hz + h^2}}$$

であり，$P_n(z)$（$n = 0, 1, 2, \cdots$）と

$$F(h, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left.\frac{\partial^n F}{\partial h^n}\right|_{h=0} \frac{h^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(z)$$

の関係がある．この式を利用して，$P_0(z)$, $P_1(z)$, $P_2(z)$を求めよ．

（３）　下図の五角形 ABCDE は正五角形である．五角形 FGHIJ および三角形 AIH の面積は，それぞれ正五角形 ABCDE の面積の何倍であるか求めよ．



（４）　どの目も出る確率が等しい$1, 2, 3, 4, 5, 6$の目を持つサイコロを，１回ふったときに各目の出る確率を考える．$A(x) = \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{6}x^5 + \frac{1}{6}x^6$

として，サイコロの出る目の確率分布とこの多項式との対応を考えてみると，多項式$A(x)$を$A(x)=\sum_k a_k x^k$とおいたとき，a_kはkの目が出る確率を表している．次に，このサイコロを２回ふったときに出る目の和を考える．以下の問いに答えよ．

（4-1）積$A(x)A(x)$を計算せよ．

（4-2）$A(x)A(x)=\sum_k b_k x^k$とおくと，b_kが，サイコロを２回ふったときに出る目の和がkになる確率を表すことを説明せよ．

数　学

【第２問】

(x, y)平面において時間tについての連立微分方程式

$$\dot{x} = y - f(x)$$
$$\dot{y} = -x + a - by$$

に関して，以下の問いに答えよ．解答を導いた過程も簡潔に示すこと．なお，$\dot{x} = dx/dt$，$\dot{y} = dy/dt$で，a，bは定数，$f(x)$は微分可能な実関数とし，$df(x)/dx$を$f'(x)$と書く．また，微分方程式の平衡点とは$\dot{x} = 0$，$\dot{y} = 0$となる点のことである．

（１）　$a = 0$，$b = 0$の場合，この方程式系の平衡点(x_o, y_o)はどこになるか．

（２）　$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$とする．微分方程式$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$の平衡点$\mathbf{x}_o$近傍で線形化された方程式は$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}$と表される．ここで，$\mathbf{A} = (a_{ij})$，$a_{ij} = \left.\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_o}$，$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_o$である．

$a = 0$，$b = 0$の場合について行列$\mathbf{A}$を求めよ．

（３）　（２）で求めた線形化された方程式に関して以下の問いに答えよ．

(3-1) 行列$\mathbf{A}$の固有値を求めよ．

(3-2) 固有値の実部と虚部の符号を$f'(0)$の値で場合分けして調べよ．

(3-3) 線形化された方程式の一般解は，行列$\mathbf{A}$の固有値をλ_1，λ_2として，$\lambda_1 \neq \lambda_2$の場合には，$\exp(\lambda_1 t)$，$\exp(\lambda_2 t)$の線形結合で表される．これを利用して，平衡点の近傍で解が時間tの増大とともにどの様になるかを$f'(0)$の値で場合分けして述べよ．

（４）　$f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x$，$0 < \dfrac{3}{2}(1-a) < b < 1$の場合，唯一の平衡点$(x_o,\ y_o)$が存在す

ることを示せ．また，その平衡点は$1 < x_o < \sqrt{3}$にあることを示せ．