地球科学 I

【第１０問】

地球上の大気や海洋のような回転系の流体に見られる波について，以下の浅水波方程式に基づいて考えてみよう（図１参照）.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = fv - g\frac{\partial h}{\partial x} \qquad \text{(A1)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -fu - g\frac{\partial h}{\partial y} \qquad \text{(A2)}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \qquad \text{(A3)}$$

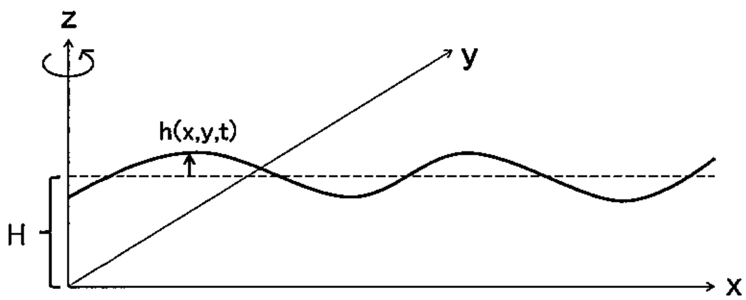

図１

鉛直上向きに z 軸，北向きに y 軸，東向きに x 軸をとり，u，v はそれぞれ流体の x，y 方向の速度成分，H は静止状態での流体層の厚さ，h は静止状態を基準とした流体表面の高さのずれを表す（ただし，$h/H \ll 1$）. gは重力加速度，fはコリオリ因子で，いずれも正の定数であるとする．h は時間 t およびx，yについての関数であり，u，v についても z には依存せず t およびx，yについての関数であるとして，以下の設問に答えよ.

（１）（A1）～（A3）式の定常解は地衡流とよばれる流れとなる．この地衡流はどのような力の釣り合いが成り立つ流れであるか，20 字程度で説明せよ.

（２）fは回転の効果を表すパラメータである．回転の効果のみを考慮した以下の（B1），（B2）式を考える.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = fv \tag{B1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -fu \tag{B2}$$

この解は（A1）～（A3）式においてhは変化せず，u，vのみが振動する解に相当する．この振動解の周期を答えよ．

（３）次に，（A1）～（A3）式において回転の効果を無視した以下の（C1）～（C3）式を考える．

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial h}{\partial x} \tag{C1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g\frac{\partial h}{\partial y} \tag{C2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{C3}$$

(3-1)（C1）～（C3）式よりu，vを消去してhについての方程式をまず導いたうえで，その解を$e^{i(kx+ly-\omega t)}$に比例する形におくことで，以下の分散関係式

$$\omega^2 = gH(k^2 + l^2)$$

を導け．

(3-2) 簡単のため，h の位相の進行方向が東向きになるような波を考える．このとき，uの位相についての正しい説明は次の(a)～(c)のうちどれか，理由をつけて答えよ．

(a) hと同位相になる．

(b) hに比べ，位相が$\pi/2$東側にずれる．

(c) hに比べ，位相が$\pi/2$西側にずれる．

（４）最後に，（A1）～（A3）式に戻って考える．

(4-1) 解を$e^{i(kx+ly-\omega t)}$に比例する形においたとき，次の分散関係式を導け．

$$\omega^2 = f^2 + gH(k^2 + l^2)$$

(4-2) (A1) ～ (A3) 式の解がどのような場合に (B1), (B2) 式もしくは (C1) ～ (C3) 式で得られた解に近づくか,「ロスビーの変形半径」 $r_R \equiv \sqrt{gH/f^2}$ を用いて説明せよ. また, r_R は長さの次元をもつパラメータであるが, それが何を表す指標となるか, あわせて 150~200 字程度で説明せよ.

(4-3) 簡単のため, h の位相の進行方向が東向きになるような波を考える. このとき, u および v の位相についての正しい説明は次の(a)～(c)のうちどれか, u, v それぞれについて理由をつけて答えよ.

(a) hと同位相になる.

(b) hに比べ, 位相が$\pi/2$東側にずれる.

(c) hに比べ, 位相が$\pi/2$西側にずれる.

地球科学I

【第１１問】

太陽から吹き出すプラズマ（太陽風）は高い導電率を持ち，その結果としてプラズマの速度$\vec{v}$と磁場$\vec{B}$の間に近似的に

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) = 0 \qquad \text{(A)}$$

という関係が成り立つ．tは時間である．このときの太陽風の磁場がどのような形をとるか考えてみよう．

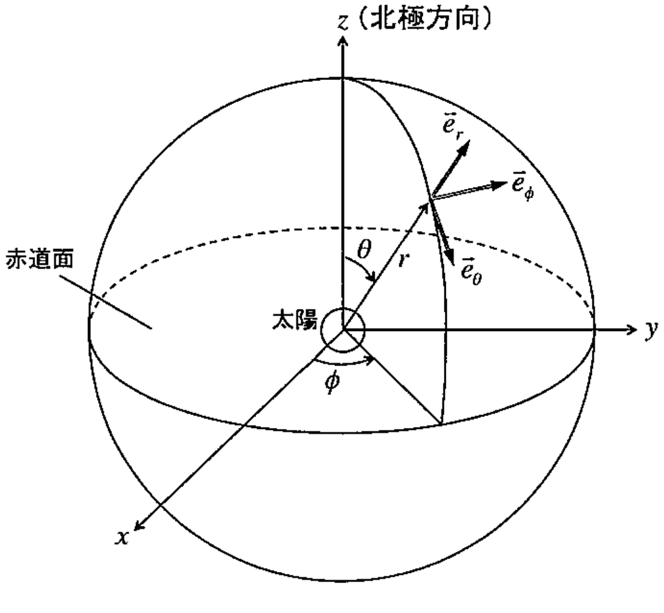

図１

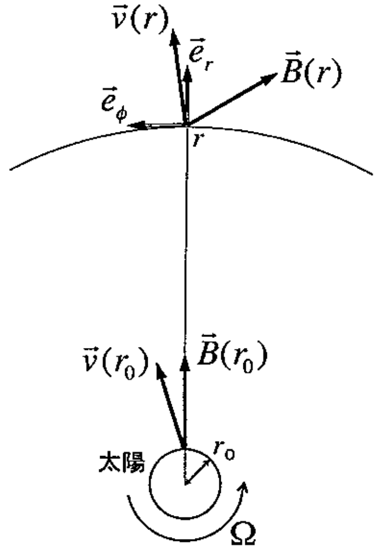

図２

図１のように太陽を中心とする極座標系を導入し，動径r，方位角ϕ，天頂角θの基底ベクトルをそれぞれ$\vec{e}_r$，$\vec{e}_\phi$，$\vec{e}_\theta$とする．ここでは図２のように太陽の赤道面内（θ = 90°）における運動を考えることにして，速度$\vec{v}$と磁場$\vec{B}$は次のようにrだけに依存するとする．

$$\vec{v}(r) = v_r(r)\,\vec{e}_r + v_\phi(r)\,\vec{e}_\phi$$

$$\vec{B}(r) = B_r(r)\,\vec{e}_r + B_\phi(r)\,\vec{e}_\phi$$

図２に示すように太陽の半径をr_0とする．太陽表面では，プラズマの運動は太陽の自転角速度Ωと同じ角速度をもち，かつ動径方向の速度はv_0である．また，プラズマに伴う磁場は，動径方向の成分B_0のみを持つものとする．すなわち，

$$\vec{v}(r_0) = v_0\,\vec{e}_r + r_0\Omega\,\vec{e}_\phi$$

$$\vec{B}(r_0) = B_0\,\vec{e}_r$$

である．このとき以下の問いに答えよ．なお，極座標系においては，ベクトル場$\vec{A} = A_r\,\vec{e}_r + A_\theta\,\vec{e}_\theta + A_\phi\,\vec{e}_\phi$の発散と回転はそれぞれ次のように表される．

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta\,A_r) + \frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta\,A_\theta) + \frac{\partial}{\partial\phi}(rA_\phi)\right]$$

$$\nabla\times\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]\vec{e}_r + \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right]\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\vec{e}_\phi$$

（１）磁場の連続性 $\nabla\cdot\vec{B} = 0$ から，B_rが

$$B_r = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 B_0 \qquad \text{(B)}$$

のように距離とともに減少することを示せ．

（２）定常状態$\partial\vec{B}/\partial t = 0$を考えると，（A）式から以下が成り立つことを示せ．

$$r(v_\phi B_r - v_r B_\phi) = \text{一定} \qquad \text{(C)}$$

（３）（B）式と（C）式をもとに，B_ϕとB_rの比をv_r, v_ϕ, Ω, rを用いて以下の形で表せ．

$$\frac{B_\phi}{B_r} = \boxed{} \qquad \text{(D)}$$

（４）太陽を中心に角速度Ωで回転する座標系において，磁場の方向とプラズマの流れの方向がどのような関係にあるか，（D）式をもとに考察せよ．

（５）地球の位置ではおよそ $r = 1.5\times10^8$ km である．$\Omega = 2.7\times10^{-6}$ s^{-1}，$v_r = 400$ km s^{-1}として，地球の位置において太陽と地球を結ぶ直線から磁場がどのくらい傾いているかを述べよ．ただし，$r\Omega >> v_\phi$と仮定してよい．