物　理　学

【第３問】

密度が一様な球体（質量m，半径a）の運動について考える．この球体が重心を通る軸のまわりを回転するときの慣性モーメントは$2ma^2/5$である．時刻をtで表し，重力加速度をgとして，以下の問いに答えよ．なお，球体が面上を転がる場合の転がり摩擦は無視する．また，すべる場合も転がる場合も球体は常に面と接しているものとする．

（１）図 1 に示されるように，水平面に対して角度βで傾斜している斜面上にこの球体を置く．斜面と球体の間に摩擦が働かず，球体が転がることなく斜面上をすべる場合について，球体の重心が斜面を下る向きの速度をvとして運動方程式を書け．

（２）（１）と同様の状況であるが，斜面と球体の間に摩擦が働き，球体がすべることなく斜面上を転がる場合を考える．このとき，重心が斜面を下る速度をvとし，球体の回転の角速度をωとして，以下の小問に答えよ．

(2-1) 球体がすべらないという条件をvとωの関係式として表せ．

(2-2) 接点で働く摩擦力をFとして，球体の重心が斜面を下る運動の運動方程式を書け．

(2-3) Fによるモーメントにより，球体は重心のまわりを回転する．この回転運動の運動方程式を書け．

(2-4) 以上の結果を元に，vの時間変化を表す式をωとFが現れない形で表せ．

（３）図 1 の斜面がなめらかに水平面とつながっており，斜面上では摩擦が働かずに球体は転がることなくすべり，水平面上では摩擦が働くものとする．はじめに球体を水平面から高さhの場所に運動（重心の運動と重心のまわ

りの回転）を持たせずに置いた場合，水平面に達したときの球体の重心の水平方向速度 v_0 を求めよ．

（４）（３）において，水平面に達すると球体は回転し始めるが，初期には接点における球体の回転速度と球体の重心の移動速度が一致しないため，球体はすべりつつ転がり，その間球体には大きさ μmg の動摩擦が働く（μ は動摩擦係数）．ある時刻になるとそれらは一致し，球体は水平面上をすべることなく転がり，重心は一定速度で移動するようになる．その時の球体の重心の移動速度を求めよ．

（５）図２に示されるように，半径 R の球面の内側にこの球体を置く．ただし，球体の半径 a は球面の半径 R よりも十分に小さい（$a << R$）とする．球体を置くときに初期運動を与えなければ，球体の重心は平面内で往復運動をする．球面の中心を原点とし，そこから鉛直下方に下ろした線からその平面内で測った角度を θ とする．微小運動を考えて $\sin\theta \approx \theta$ と近似できるものとし，球体と球面の間に摩擦が働かずに球体が転がることなくすべる場合について，往復運動の周期を求めよ．

（６）（５）と同様の状況であるが，球面と球体の間に摩擦が働き球体がすべることなく球面上を転がる場合について，往復運動の周期を求めよ．

図１

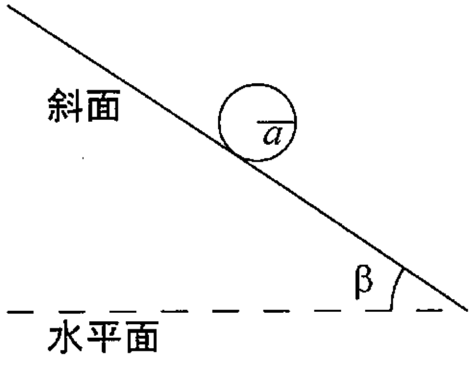
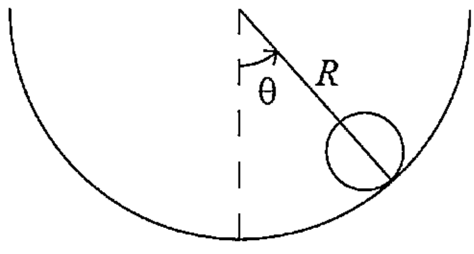


図２



【第４問】

一般に，磁場中におかれた電流Iの流れるコイルを通る磁束がΦの時，コイルの位置エネルギーUは$-\Phi I$で与えられ，コイルの任意の位置座標ξが増す向きにコイルが磁場から受ける力F_ξは，

$$F_\xi = -\frac{\partial U}{\partial \xi} = I\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \qquad \text{(ア)}$$

で与えられることが知られている．

図１に示すように，真空中に，半径aで直流電流I_1の流れる大コイルと，その中心軸上の距離xに半径b ($b \ll x$)で直流電流I_2の流れる小コイルとがおかれている時，必要に応じて式(ア)を用いて以下の問いに答えよ．ただし，小コイルの中心は大コイルの中心軸上にあるものとする．また，コイルの巻数はともに１とし，真空の透磁率をμ_0とする．

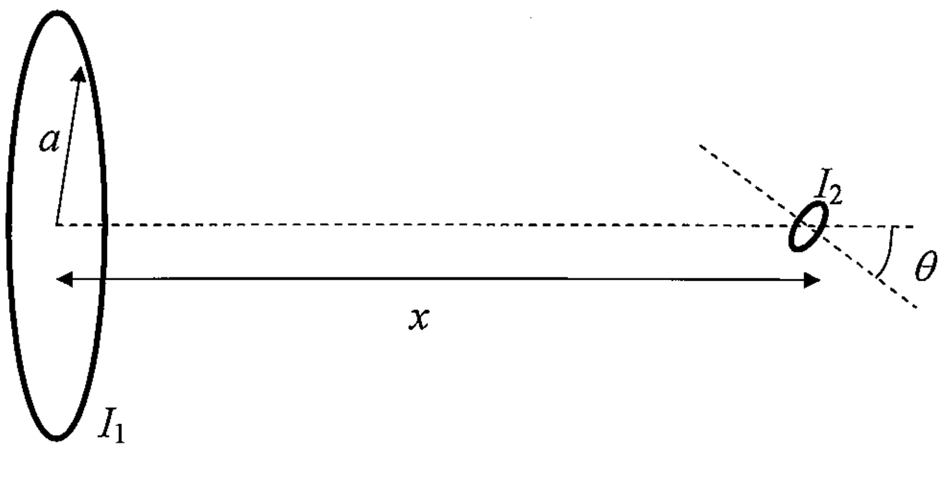


図１

（１）大コイルの電流が小コイルの中心の位置に発生する軸方向の磁場は，

$H = \dfrac{a^2 I_1}{2(a^2+x^2)^{3/2}}$ となることを導け．

必要なら，線電流要素 $I d\mathbf{s}$ がそれから $\mathbf{r}$ 離れた位置につくる磁場 $d\mathbf{H}$ は，Biot-Savart の法則によって $d\mathbf{H} = \dfrac{I}{4\pi}\dfrac{d\mathbf{s}\times\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$ で与えられることを用いてよい．

（2）小コイルの面の法線と大コイルの中心軸がθ の角をなす時，小コイルを貫く磁束Φと小コイルの位置エネルギーUを求めよ．ただし，$b << x$の条件により，（1）で求めた磁場Hは小コイル内で一定と仮定してよい．

（3）小コイルに働く偶力を求めよ．

（4）小コイルに働く x 方向の力の大きさを求め，直流電流 I_1 と I_2 の向きの違いによる力の向きの違いを述べよ．

（5）磁場が空間的に一様であるとした場合，直流電流が流れるコイルには偶力しか働かない．この理由を 50～100 字程度で述べよ．

【第５問】（この問題は化学の問題とみなすことができる）

原子Ａと原子Ｂを x と$(1-x)$ の割合で混合した時のエントロピーの増分は混合のエントロピーΔS_{mix}と呼ばれる．原子ＡとＢの個数の合計を N とすると，混合のエントロピーΔS_{mix}は，

$$\Delta S_{mix} = -Nk(x\ln x + (1-x)\ln(1-x)) \qquad （ア）$$

と与えられる．k はボルツマン定数であり，k とアボガドロ数 N_A の積は気体定数 R に等しい．以下の問いに答えよ．

（１）　エントロピーSは，系のとりうる状態の数を W とすると，

$$S = k\ln W$$

と定義される．このことを用いて，（ア）式を以下のような統計的方法で導いてみよう．系を体積の等しい N 個のセルに分け，各セルに原子Ａまたは原子Ｂを入れる．図１ａのように，左側の N_1 個のセルにＡを，残りの N_2 個のセルにＢを入れる場合の数を W_1 とする．また，図１ｂのように，適当に選んだ N_1 個のセルにＡを，残りの N_2 個のセルにＢを入れる場合の数を W_2 とする．ただし，$N_1 + N_2 = N$ である．同種の原子の入れ替えを区別しないとすると，$W_1 = 1$ である．このとき，以下の小問に答えよ．

(1-1) W_2 を N, N_1，N_2 を用いて表せ．

(1-2) $N_1 / N = x$ のとき，混合のエントロピーが（ア）式のように与えられることを示せ．必要があれば，N が１より十分大きい場合のスターリングの近似式 $\ln N! = N(\ln N - 1)$を用いよ．

（２）　二つの成分Ａ，Ｂを一定温度 T，一定圧力 P のもとで混合し，この混合溶液が理想溶液である場合を考える．ここで，混合によるエントロピーの変化は（ア）式に示したΔS_{mix}で与えられ，混合の前後で内部エネルギーや体積の変化がない場合，この溶液を理想溶液という．成分 i（i = A, B）の純粋な溶液１モルあたりのエントロピーを s_i^{L0}，内部エネルギーを u_i^{L0}，体積を v_i^{L0} とする．また，溶液中の成分ＡとＢのモル比を x と $1-x$ とする．このと

き，以下の小問に答えよ．

(2-1) この混合溶液 n モルのギブスの自由エネルギーG を求めよ．ただし，ギブスの自由エネルギーG は，系の内部エネルギーU, エントロピーS, 温度 T, 体積 V, 圧力 P を用いて，$G = U - TS + PV$ と与えられる．

(2-2) 混合溶液中の成分 A と B の化学ポテンシャルをμ_A^L とμ_B^L とすると，$G = nx\mu_A^L + n(1-x)\mu_B^L$ が成り立つ．μ_A^L とμ_B^L をそれぞれ求めよ．

(３) 一定温度 T, 一定圧力 P のもとで，成分 A と B からなる二成分理想溶液が，ほぼ純粋な成分 A からなる固相と接して熱力学的平衡にあるとする（図２）．このとき，以下の小問に答えよ．

(3-1) 固相中の成分Aの化学ポテンシャルをμ_A^{S0} とするとき，上記 (2-2) の結果を用いて，溶液中の成分Aのモル濃度を求めよ．

(3-2) 温度を上げると溶液への成分Aの溶解度は増加するか減少するかを推論し，その根拠を，式を用いて４行程度で答えよ．

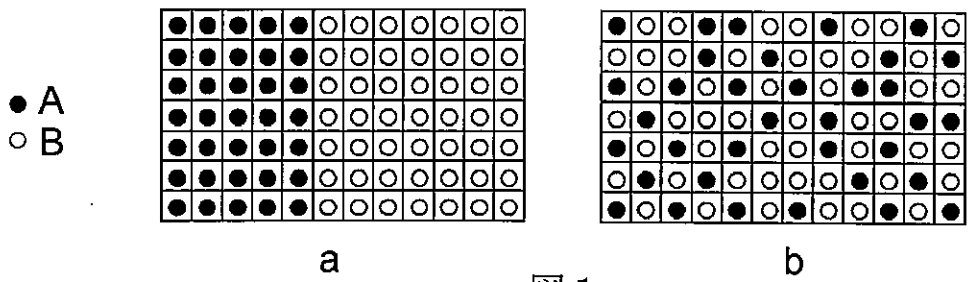


図１

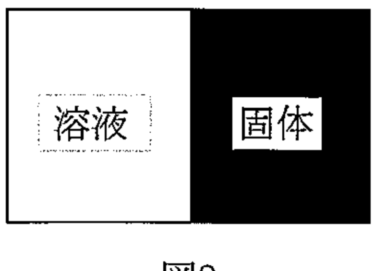


図2