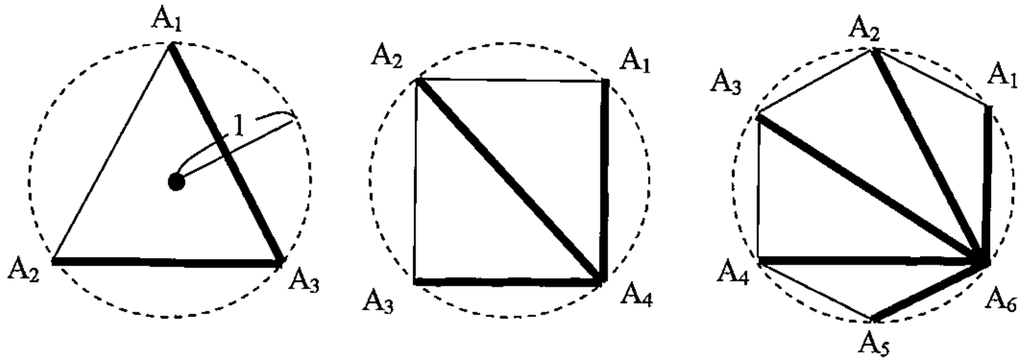
数　学

【第１問】

半径１の円に内接する正N角形 $A_1A_2\ldots A_N$ (Nは３以上の自然数) を考える．頂点 A_Nからそれ以外の$N-1$個の頂点 A_1～A_{N-1}までを結ぶ対角線または辺（下図の太実線）を引いたとき，それらの長さの積$S_N=\overline{A_NA_1}\cdot\overline{A_NA_2}\cdot\cdots\cdot\overline{A_NA_{N-1}}$を定義する．



（１） S_3, S_4, S_6の値を計算せよ．また，それらの結果からS_Nの値を推測せよ．

（２） １のN乗根は複素平面上において$z=0$を中心とする単位円の円周のN等分点にあたり，正N角形を形作ることを利用して，S_N の値の推測を以下の手順で証明せよ．

(2-1) １のN乗根は$e^{2\pi\frac{n}{N}i}$　($n=1,2,\cdots,N$) であることを示せ．

(2-2) (2-1) を利用して，z^N-1 をz の１次式の積で表せ．

(2-3) Nに対して関数$P_N(z)$を

$$P_N(z)\equiv\prod_{n=1}^{N-1}(z-e^{2\pi\frac{n}{N}i})=(z-e^{2\pi\frac{1}{N}i})(z-e^{2\pi\frac{2}{N}i})\cdots(z-e^{2\pi\frac{N-1}{N}i})$$

と定義する．$P_N(1)$を求めよ．

(2-4) (2-3) を利用してS_Nの値を求めよ．

【第２問】

以下の問いに答えよ．

（１） $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ の固有値 λ を求め，$(A-\lambda I)^3$ を計算せよ．また，A^n を求めよ．ここで I は 3 行 3 列の単位行列，n は自然数である．

（２） 直交座標系における曲線 $x=a\sin\theta$，$y=a\cos\theta$，$z=c\theta$ （a, c は正の定数，$0\leq\theta\leq 2\pi$）について，以下の設問に答えよ．

(2-1) $\theta=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3\pi}{2},\ 2\pi$ に対応する点の座標を求めよ．また，これを利用して曲線を図示せよ．

(2-2) 曲線の長さを求めよ．

（３） 関数 $f(z)$ のマクローリン展開 $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$ について，以下の問いに答えよ．ここで $f^{(n)}(z)$ は $f(z)$ の n 次導関数である．

(3-1) 指数関数 e^z，正弦関数 $\sin x$，余弦関数 $\cos x$ のマクローリン展開を求めよ．

(3-2) $z=ix$ に対する (3-1) の結果から $(\cos x+i\sin x)^n=\cos nx+i\sin nx$ を導け．ここで i は虚数単位である．

（４） 当たる確率が $\dfrac{1}{n}$ であるくじを n 回引いたときに，n 回のうち少なくとも 1 回は当たりになる確率を $P(n)$ とする．このとき $P(1), P(2), P(3), \displaystyle\lim_{n\to\infty}P(n)$ の値を求めよ．