物　理　学

【第３問】

図１，２に示すような縦の長さ $2a$，横の長さ $2b$，質量 M で厚さおよび密度が一様の剛体板について考える．この板の重心を G とする．この板は，板と平行な鉛直面内で支点 A のまわりを回転するものとする．A は上下端から距離 a の線上に位置し，A と G の距離を h とする．なお，重力加速度の向きは鉛直下向きで，その大きさを g とする．また，空気の抵抗および支点 A における摩擦は無視できるものとする．次の問いに答えよ．

（１）　図１の左図のように，板はAとG が水平になるように支えられていた．ある時，支えが外れ，支点Aのまわりに運動する状態になった．

(1-1) この板の重心 G のまわりの慣性モーメント I_G を求めよ．

(1-2) この板の A のまわりの慣性モーメント I_A を求めよ．また，この板が支点Aのまわりに角速度 ω で回転しているときの運動エネルギー K_A が $K_A=(1/2)I_A\omega^2$ となることを示せ．

(1-3) 板の重心 G が最下点に到達したときの板の角速度 ω_s を求めよ．

(1-4) 図１の右図のように質量の無視できる長さ h の棒に板と同じ質量 M を持つ質点をつけ水平に保つ．この棒を静かに放した後，最下点に到達した時の質点の角速度 ω_p を求めよ．また，ω_p と(1-3)で求めた ω_s の大小関係について，質点の運動と剛体の運動のエネルギーの保存則を考慮して 100 字程度で論ぜよ．ただし，支点Cにおける摩擦の効果は無視できるものとする．

（２）　次に，支点 A のまわりに運動する剛体板の微小振動について考える．図２のように支点 A と重心 G を結んだ直線と鉛直方向のなす角度を θ とする．微小振動であるため θ の値は小さく，$\sin\theta\approx\theta$ という近似が成り立つものとする．

(2-1) 板の運動方程式を θ に関する微分方程式として求めよ．慣性モーメ

ントについては I_A の記号を用いてもよい．

(2-2) 微小振動の周期 T を求めよ．慣性モーメントについては I_A の記号を用いてもよい．

(2-3) 微小振動する板の周期 T は，h の長さを変えることによって変化する．周期 T を h の関数として求めよ．また，周期 T を最小にする h を求めよ．

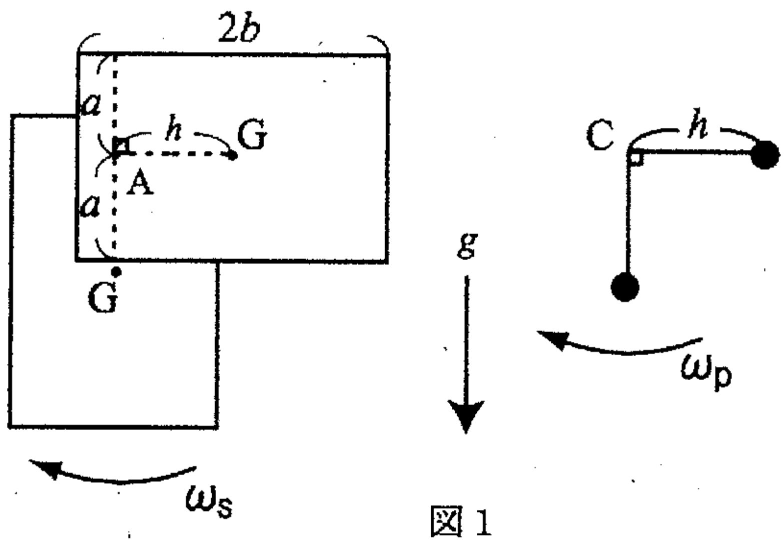


図 1

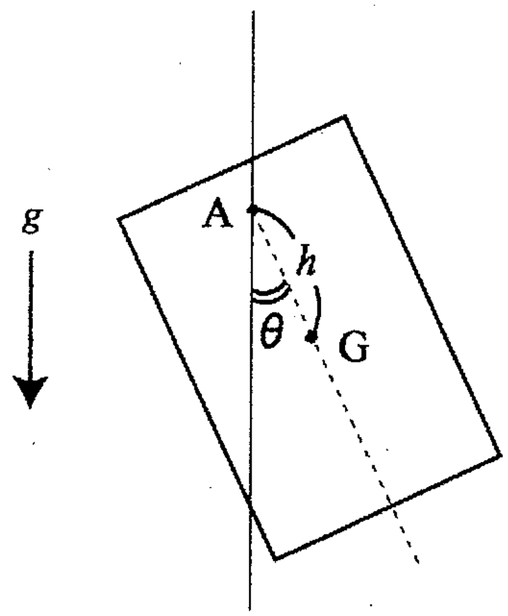


図 2

【第４問】

起電力 E の電源，インダクタンス L のコイル，抵抗 R，静電容量 C のコンデンサ，スイッチ S_1, S_2 および S_3 よりなる下図のような回路に関し，以下の問いに答えよ．

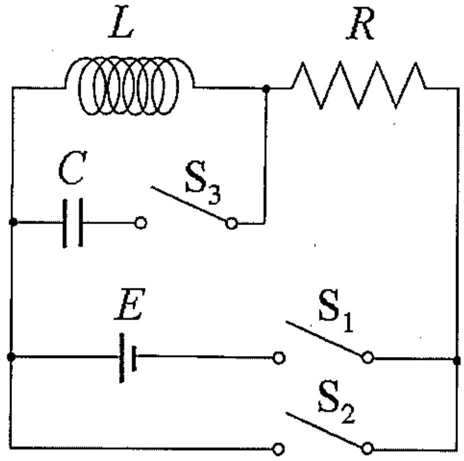
（1） スイッチ S_1 を閉じた場合の電流 J の時間変化を表す微分方程式を示せ．次に，これを解き，かつ J の時間変化を図に示せ．

（2） （1）の微分方程式をエネルギーの収支を表すように変形し，各項の物理的意味を，それぞれ 10 字程度で説明せよ．また，時刻 T においてコイルに貯えられた磁場エネルギー W_L を求めよ．

（3） さらに長時間経過して平衡に達した後，S_1 を開けると同時に S_2 を閉じた場合の電流 J の時間変化を表す微分方程式を示せ．次に，これを解き，かつ J の時間変化を図に示せ．

（4） S_2 を閉じて長時間経過して，平衡に達するまでの間に，抵抗で発生した熱エネルギー W_R を求めよ．また，（3）において平衡に達した時点の W_L と，ここで求めた W_R を比較し，その物理的意味を 30 字程度で述べよ．

（5） S_2 を開いた後，再び S_1 を閉じ，長時間経過して平衡に達した後，S_1 を開けると同時に S_3 を閉じた場合，コンデンサに現れる最大電圧を求めよ．



【第５問】　（この問題は化学の問題とみなすことができる.）

熱平衡状態にある理想気体中の分子の速度はマックスウェル分布に従うことが知られており，分子の速度が（v_x, v_y, v_z）と（$v_x + dv_x, v_y + dv_y, v_z + dv_z$）の間にある確率を$f(v_x,v_y,v_z)dv_xdv_ydv_z$とおいて定義される確率密度関数$f(v_x,v_y,v_z)$は下式（A）で与えられる．このことを前提として，以下の問い（１）－（７）に答えよ．

$$f(v_x,v_y,v_z)=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{m}{2kT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)\right] \qquad \text{(A)}$$

ここで，Tは絶対温度，kはボルツマン定数，mは気体分子の質量，πは円周率である．（７）以外は，途中の考え方や計算過程も示すこと．また，必要であれば，以下の積分公式を利用せよ．これらの積分公式でaは正の定数である．

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\ ,\quad \int_0^\infty xe^{-ax^2}dx=\frac{1}{2a}\ ,\quad \int_0^\infty x^2e^{-ax^2}dx=\frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\ ,$$

$$\int_0^\infty x^3e^{-ax^2}dx=\frac{1}{2a^2}\ ,\quad \int_0^\infty x^4e^{-ax^2}dx=\frac{3}{8a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\ ,\quad \int_0^\infty x^5e^{-ax^2}dx=\frac{1}{a^3}$$

（１）　式（A）を用いて$|v_x|$の平均値を求めよ．k, T, mのうち必要なものを用いて表せ．

（２）　速さ$v\ (\equiv\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2})$の分布を表す確率密度関数が

$$g(v)=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}v^2\exp\left[-\frac{m}{2kT}v^2\right] \qquad \text{(B)}$$

となることを示せ．

（３）　$g(v)$が最大となるvの値v_mを求めよ．k, T, mのうち必要なものを用いて表せ．

（４）　$T = T_0$の場合と$T = 2T_0$の二つの場合について，$g(v)$の概形を同じ座標内に図示せよ．

（5）　式（B）を用いて，気体分子一個の並進運動エネルギーの平均値を計算で求めよ．k, T, m のうち必要なものを用いて表せ．

（6）　図1のように，取り外し可能な板によって，体積 V_0 の左室と体積 $0.1V_0$ の右室に仕切られた断熱的な剛体容器があり，左室は温度 T_0 の理想気体で満たされているが，右室は真空であったとする．仕切りを瞬間的に取り払って気体を容器全体に広がらせ，新たな熱平衡状態を達成したときの気体の温度はいくらになるか．

（7）　今度は，図2のように，真空の無限空間におかれた体積 V_0 の断熱的な剛体容器内に温度 T_0 の理想気体が閉じこめられているとする．容器の壁に小さな孔をあけ，もとあった量の一割程度の気体を漏れ出させてから再び孔を閉じて，容器内で新たな熱平衡状態を達成したとする．このとき，容器内の気体の温度は T_0 から上ったか下ったかを予想し，理由とあわせて100字程度で定性的に述べよ．なお，容器内の気体は非常に希薄で，漏出は一分子ずつが個別に小孔から飛び出すことで起こると考えてよい．

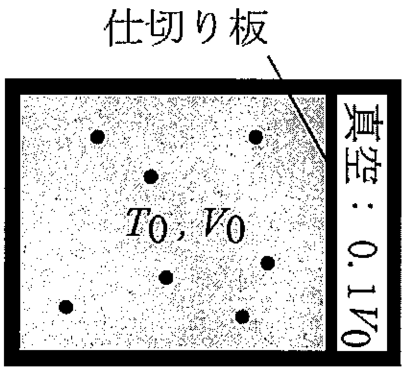


図1

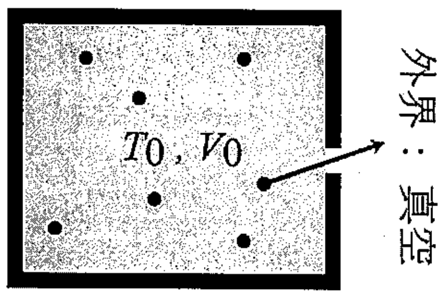


図2