数　学

【第１問】

（１）　直交座標系$(x,\ y,\ z)$の原点Oを中心とした半径１の球面Sを考える．以下の問題に答えよ．

(1-1) x軸上に点$\mathrm{P}=(p,0,0)$　$(0<p<1)$を置く．点Pを通りx軸に垂直な面と球面Sの交線が作る円を底面とし，原点Oを頂点とする円錐を考える．

(A) 円錐の体積Vをpを用いて表せ．

(B) Vの最大値およびそのときのpの値を求めよ．

(1-2) 球面S上の３点$\mathrm{P_1, P_2, P_3}$と原点Oからなる四面体$\mathrm{OP_1P_2P_3}$を考える．この四面体の体積のとりうる最大値を求めよ．次に，３点$\mathrm{P_1, P_2, P_3}$がそれぞれ独立に，場所によらず一様な確率密度で球面S上に分布するとした時，この四面体の体積の期待値を求めよ．期待値を求める際，たとえば$\mathrm{P_1, P_2, P_3}$のうち２点をxy平面上においても一般性を失わないことに注意せよ．

（２）　[-1,1]を定義域とする関数列$f_0(x)=1, f_n(x)=\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\ (n=1,2,....)$について以下の問題に答えよ．

(2-1) 上記の微分を実行し，$f_1(x), f_2(x), f_3(x)$をxの多項式として表せ．

(2-2) $\int_{-1}^{1} f_m(x)f_n(x)dx = C\delta_{nm}$と表せることを証明し，$C$の値を求めよ．

ただし，δ_{nm}は，$n=m$の時のみ１の値をとり，その他の場合は０の値をとる関数である．また，m,nは整数で$m,n\geq 0$とする．計算に際しては，以下の関係を用いよ．

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx = 2^{2n+1}\frac{n!n!}{(2n+1)!}$$

(2-3) 関数$g(x)=|x|$を，関数列$f_n(x)$を用いて展開し，$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n f_n(x)$と表した時の係数$a_n$のうち$a_0, a_1, a_2$の値を求めよ．

【第２問】

（１） 直交座標系(x, y, z)上のベクトル$\mathbf{u}$について$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\mathbf{u}) = 0$の関係を証明せよ．

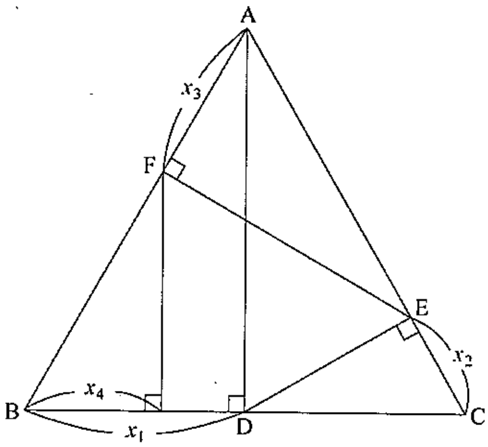
（２）行列$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{bmatrix}$で表せる線形変換を考える．ただし$a, b$は実数である．

(2-1) 行列$\mathbf{A}$の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2-2) ベクトル$\mathbf{X}$が

$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ と表されるとき，$\mathbf{A}^n\mathbf{X}$を求めよ．ただし，nは正の整数である．

（３）１辺の長さが１の正三角形ABCの頂点Aから辺BCへの垂線ADを引いたとき，BDの長さをx_1とする．次に，Dから辺CAに下した垂線をDEとし，CEの長さをx_2，Eから辺ABに下した垂線をEFとし，AFの長さをx_3というように，同様の手続きを繰り返すとき，$\lim_{n \to \infty} x_n$を求めよ．



（４） xの関数$y(x)$が微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y^4 - 1}{4y^3}$$

に従うとする．この微分方程式を解き，$x = 0$において$y(0) = \sqrt{2}$，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$を満たすような関数$y(x)$を求めよ．微分方程式の両辺に$\dfrac{dy}{dx}$を乗じることにより，解法が簡単になることに注意せよ．