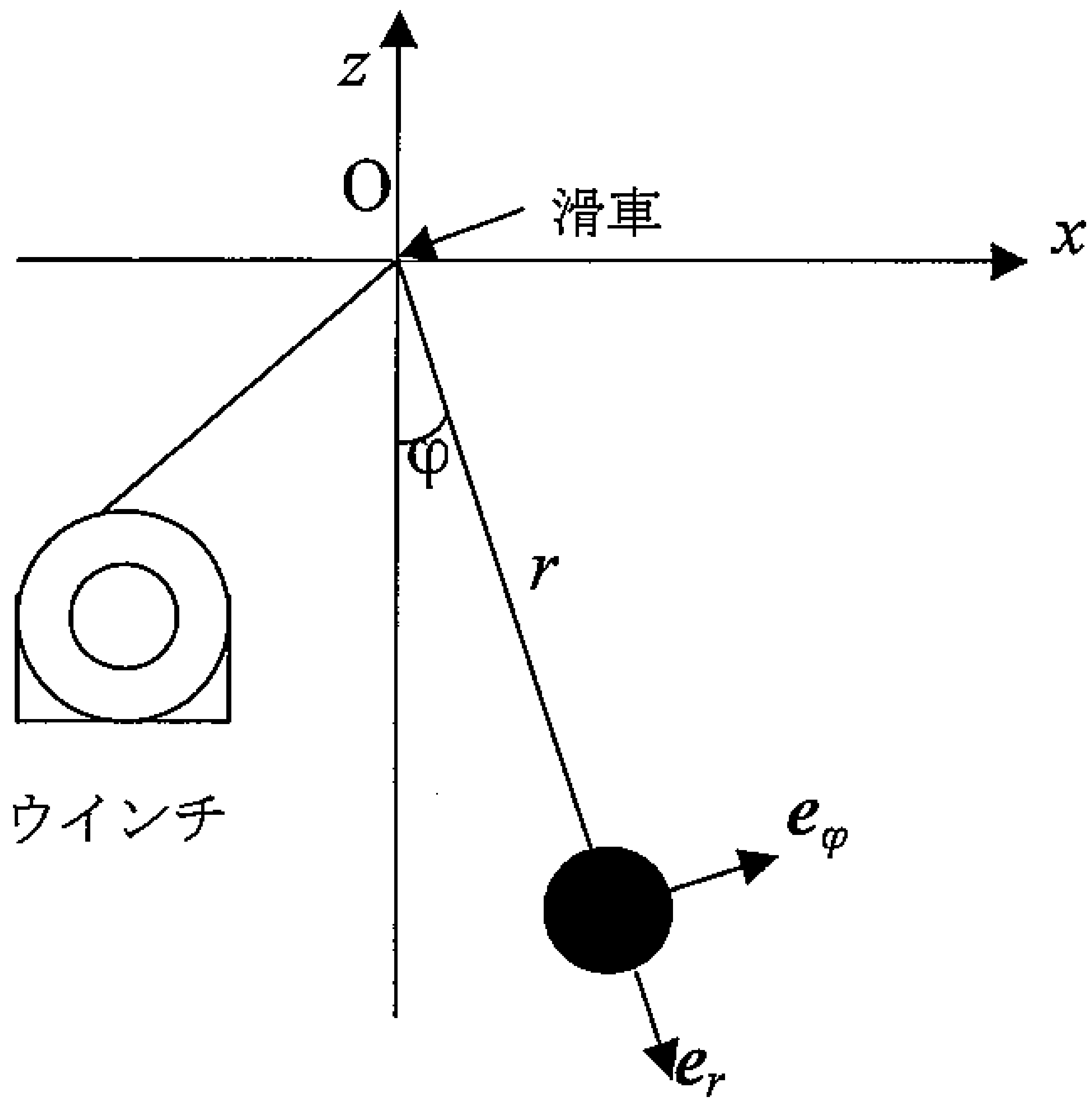
# 物　理　学

【第３問】

質量$m$の錘（おもり）と長さ$r$が変化するケーブルとで構成される振り子の運動について以下の問いに答えよ．図のように，錘の反対側に取り付けられたウインチによって，ケーブルの長さ$r$は自由に変えられるとする．また，滑車の中心を原点とし，鉛直$z$軸とケーブルの間の方位角を$\varphi$（ラジアン），滑車から錘の動径方向に$r$軸をとり，振動面右に$x$軸の正方向をとる．重力加速度を$g$とする．ここで，動径方向，方位角方向の単位ベクトルを，それぞれ$\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\varphi$とすると，加速度は$\boldsymbol{a}=(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_r+(2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi})\boldsymbol{e}_\varphi$と表される（$\dot{r}$，$\ddot{r}$はそれぞれ$r$の１階，２階時間微分）．なお，空気の抵抗，ケーブルや滑車の径や質量は無視できるとする．以下の問題では，微少振幅（$|\varphi|$の最大値が１よりずっと小さい）を仮定し$\sin\varphi\approx\varphi$とおけるものとする．




（１）　方位角方向の運動方程式を$m$, $g$, $r$及び$\varphi$の時間微分を用いて書け（全てを用いなくても良い）．

（2）　ケーブルの長さが$r=l$で一定のとき，振り子の振動周期を$g$，$l$などを用いて書け．

（3）　ケーブルを一定速度$c$ ($>0$)で巻き上げる場合（振り子の長さが短くなる場合）に，振り子の振幅がどのように変化するか考察する．時刻0で巻き上げ始めてからの時間を $t$ とすると，時刻 $t$ でのケーブルの長さは$r=l-ct$となるが，巻き上げ速度$c$が小さく，経過時間$t$も小さい巻き上げの初期のみに注目すると，$ct<<l$となるために，$r\sim l$と近似することができる．この場合に，（1）で求めた運動方程式の近似式を求めよ．

（4）　$0<c<\sqrt{gl}$ の場合に，時刻0において$\varphi=\varphi_0$，$\dot{\varphi}=0$という初期条件を与えて，（3）で求めた線形微分方程式の解を求めよ．ケーブルを巻き上げたとき，振り子の振幅が時間とともにどのように変化するか20字程度で述べよ．

（5）　$x$方向の水平変位$x=r\cdot\sin\varphi\approx r\cdot\varphi$を導入すると，（1）で求めた運動方程式は，$\ddot{x}+\omega_0{}^2x=\ddot{r}x/l$（ここで$\omega_0=\sqrt{g/l}$）と変形できる．$m\dot{x}$を両辺にかけ，時刻0から時刻$t$まで積分すると，式

$$\left[\frac{m\dot{x}^2}{2}+\frac{m\omega_0{}^2x^2}{2}\right]_{t=0}^{t=t}=\left[\int_0^t\frac{d(x^2)}{dt}\cdot\ddot{r}dt\right]\cdot\frac{m}{2l}$$

が得られる．この式の左辺は，振り子の固有振動のエネルギー$m\dot{x}^2/2+m\omega_0{}^2x^2/2$の時刻$t$と時刻0での差を表す．右辺はケーブルの長さの変化$\ddot{r}$を通じて固有振動に与えられた外界のエネルギーを表す．今，ケーブルの長さが振り子の固有振動数の2倍の振動数で$r=l+\varepsilon\cdot\sin(2\omega_0 t)$（$0<\varepsilon<<l$）のように変化する場合について，$\ddot{r}d(x^2)/dt$を評価し，固有振動エネルギーの時間変化を見積もろう．振幅がゆっくり変化する状況を想定し，振り子の変位$x$が，$A$を定数とする$x=A\cdot\cos(\omega_0 t)$で近似できるとする．ここで，$\ddot{r}d(x^2)/dt$を求めるとともに，横軸を時間軸とする$\ddot{r}d(x^2)/dt$のグラフを描け．また，エネルギー変化の式とグラフから，振り子の振幅がどのように変化するか30字程度で答えよ．

【第４問】

電磁波は，1864 年にマックスウェルによって理論的に予言され，1888 年にはヘルツにより実験的に確かめられた．電磁波について次の設問に答えよ．

（１）まず真空中を伝わる電磁波について考えよう．真空中のマックスウェル方程式は，電場を $\boldsymbol{E}$，磁場を $\boldsymbol{B}$ として，

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{B}, \quad \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} = -\nabla\times\boldsymbol{E}, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{E} = \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$$

で与えられる．但し，$\varepsilon_0$ および $\mu_0$ は，真空の誘電率および透磁率である．直交座標系$(x, y, z)$において，電場 $\boldsymbol{E}$ および磁場 $\boldsymbol{B}$ が $z$ と時間 $t$ だけの関数であったとし，更に無限遠で電磁場の $z$ 成分 $E_z$ および $B_z$ が消えると仮定する．このとき電磁場の $z$ 成分は，横波の条件

$$E_z = B_z = 0$$

を満たすことを示せ．

（２）真空中を伝播する電場 $\boldsymbol{E}$ の $x$ 成分 $E_x$ に対して，次の波動方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)E_x = 0$$

が導けることを示せ．また係数 $c^2$ を $\varepsilon_0$ および $\mu_0$ を用いて表せ．

（３）$F(\eta)$ および $G(\eta)$ を，$\eta$ について２階以上微分可能の連続関数とする．このとき（２）の波動方程式は，

$$E_x(z,t) = F(z-ct) + G(z+ct)$$

を満たすことを示せ．

（４）次に電磁波がプラズマ中を伝わる場合を考える．つまり空間に数密度 $n_0$ の電子と数密度 $n_0/Z$ の正イオン（$Z$ は正イオンの電荷数）が存在している系を考える．このプラズマ中に電磁波が入射すると，電磁場の変動により電子と正イオンは運動し，電流 $\boldsymbol{j}$ が作られ電磁波の特性が変わる．設問（１）と同じように，電場 $\boldsymbol{E}$ および磁場 $\boldsymbol{B}$ が $z$ と時間 $t$ だけの関数であったとして，$E_x$ に対して波動方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega_{\mathrm{pe}}^2\right)E_x = 0$$

が導けることを示せ．但し，$\omega_{\mathrm{pe}}^2 = n_0 e^2/(\varepsilon_0 m_{\mathrm{e}})$ はプラズマ角振動数の２乗，$e$ は電荷，$m_{\mathrm{e}}$ は電子の質量である．また，プラズマ中でのマックスウェルの方程式は，

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{B} - \frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{j},\quad \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} = -\nabla\times\boldsymbol{E},\quad \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$$

であり，電流を担う電子の運動は,

$$m_e\frac{\partial}{\partial t}v_{ex} = -eE_x$$

で与えられる．ここで，電子の速度の $x$ 成分 $v_{ex}$ については，電子の集団運動（流体運動）による速度とみなして，時間についての全微分ではなく偏微分に置き換えている．また，正イオンは慣性質量が電子に比べて十分大きいので止まっていると近似し，ローレンツ力は無視している．

（５）設問（４）で得た微分方程式の解として，$E_x = E_0\cos(kz-\omega t)$ の形を仮定したときの電磁波の$\omega$と $k$ の分散関係式を求め，グラフに示せ（但し，横軸を波数 $k$, 縦軸を周波数$\omega$とせよ）．また，長波長の電磁波と短波長のとでは、どちらの位相速度が速いか.

（６）地上の上層大気には，電離層と呼ばれるプラズマ大気があり，高度 300km 付近でプラズマ密度が最大となり，プラズマ周波数 $f_{pe}= \omega_{pe}/(2\pi)$は 5MHz 程度になる．地上から電波を電離層に向けて放射すると，周波数の違いにより反射したり透過したりすることが知られている．地上から周波数 40kHz の電波（電波時計用の標準電波），周波数 1GHz の電波（携帯電話の電波）を電離層に向けて放射すると，それぞれどうなるか．（５）の結果をもちいて 150 字程度で理由を述べよ．

【第５問】

単原子分子理想気体および光子気体（熱輻射）の状態方程式を熱力学の第一法則および分子運動論を出発点として求めたい．関連する（１）～（７）の問いに答えよ．（６）（７）以外は，式の導出過程なども記せ．

以下，$U$：内部エネルギー，$F$：ヘルムホルツの自由エネルギー，$P$：圧力，$T$：温度，$V$：体積，$S$：エントロピー，$N$：分子数，$m$：分子の質量，$\boldsymbol{v}$：分子の運動速度とする．

（１） 内部エネルギーの微小変化は，熱力学の第一法則より，$dU = TdS - PdV$ と表すことができる．この関係式から出発して，$(\partial U/\partial V)_T$ を $P$，$T$，$V$（および偏微分記号）を用いて表せ（全てを用いなくても良い）．$F\,(= U - TS)$ を $T$ および $V$ で微分する際に得られる結果が微分の順番によらないことを利用せよ．

（２） 理想気体の分子運動論より，分子の平均運動エネルギーは，$\langle mv^2/2 \rangle = (3/2)(PV/N)$ と表される．単原子分子理想気体の $U$ を $P$，$V$，$N$ を用いて表せ（全てを用いなくても良い）．

（３） 理想気体の場合，$U$ を $T$ と $V$ の関数で表すと，$T$ だけの関数となり $V$ によらない．$U = u_G(T)$ として，（１）および（２）の結果を利用して $du_G/dT$ を求めよ．

（４） 光子気体（熱輻射）の場合，$T$ だけの関数 $u_P(T)$ を用いて，$U = 3PV = u_P(T)V$ と表される．$du_P/dT$ を求めよ．

（５） （３）および（４）の結果から，単原子分子理想気体および光子気体（熱輻射）の状態方程式を求めよ．

（６） 分子運動論によれば単原子分子理想気体の温度は，分子の運動速度の分布によって決まる．光子気体（熱輻射）の温度は，光子の何の分布によ

って決まるか答えよ．

（7）　（5）で求めた二種類の状態方程式の性質は非常に大きく異なる．最も重要だと思う性質の違いとその原因について，100字程度で論ぜよ．