数　　学

【第１問】

下記の（１）～（５）すべてに解答せよ.

（１）　xの関数yについて$x^2y - e^{2x} = \sin y$が成り立つとき，$\dfrac{dy}{dx}$を求めよ.

（２）　次の行列Aの行列式を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & 9 \\ 8 & 2 & 14 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

（３）(x, y)平面上の$x \geq 0, y \geq 0, y \leq 1-2x$で囲まれた領域を$S$とする. Sの微小面積要素をds, $f(x,y) = xy$とするとき，積分$\int_S f ds$を求めよ.

（４）n個の同型の羽根を等間隔に持つ風車が回っている. 時刻tにおいて，ある羽根の先端は直交座標系で(u, v)の速度を持っていた. 風車を正面から見て反時計回りに数えてこの羽根からi番目の羽根の先端の，時刻tの速度(u_i, v_i)を$\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$と表したとき，行列$B$を求めよ.

（５）4 つのチームがサッカーの試合をトーナメント形式で行った. 4 つのチームは，強いチーム，弱いチームそれぞれ 2 つからなり，強いチームが

弱いチームに勝つ確率は 75%，強いチームが強いチーム，あるいは弱いチームが弱いチームに勝つ確率は 50 %とする．トーナメントの組み合わせはシードなしでランダムに決め，また引き分けはないとする．弱いチームが優勝する確率を求めよ．

【第２問】

ある時刻$t = 0$に直交座標系$(x,\ y,\ z)$の原点$(0,\ 0,\ 0)$を通過したボールが一定の速度で大気中を落下するときの運動について考える．大気は平均的には無風であり，鉛直風は無いが，水平風には，平均値が0で統計的特性が高さによらず一様な揺らぎがあるとする．

このボールの中心が，hだけ落下して平面 $z = -h$ 上の 1 点$(x,\ y,\ -h)$を通過する確率密度$P1(x,\ y)$は，この平面上の点$(0,\ 0,\ -h)$からの距離$r = (x^2 + y^2)^{1/2}$のみに依存し，Ce^{-r^2} （C は実定数） で与えられるという．このボールの運動に関連して以下の問いに答えよ．ただし，正の実数αについて関係$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}$が成り立つことを利用してよい．

（１） 任意の正の整数nについて，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^{2n} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2n+1}}}$$

が成り立つことを証明せよ．

（２） 確率密度$P1(x,\ y)$を平面$z = -h$全体にわたって面積分したものは 1 に等しいことに注意して，$P1(x,\ y)$に現れる定数Cの値を求めよ．

（３） 平面 $z = -h$ 上の点$(x_1,\ y_1,\ -h)$を通過したボールが，平面 $z = -2h$ 上の点$(x,\ y,\ -2h)$を通過する確率密度は，点$(x_1,\ y_1,\ -h)$を新たな原点と見なしたときにhだけ落下するボールの運動による確率密度と考えることができる．原点$(0,\ 0,\ 0)$を通過したボールの中心が，平面 $z = -2h$ 上の1点$(x,\ y,\ -2h)$を通過する確率密度$P2(x,\ y)$を求めよ．

（４） 原点$(0,\ 0,\ 0)$を通過したボールの中心が，平面 $z = -nh$ 上の 1 点$(x,\ y,\ -nh)$を通過する確率密度$Pn(x,\ y)$の表現を推定し，推定された表現が正しいことを数学的帰納法により証明せよ．

（５）原点(0, 0, 0)を通過したボールが平面 $z = -nh$ 上を通過するとき，点(0, 0, $-nh$)から距離rの点を通過すると，点数としてr^3 点が獲得できるというゲームをした場合，このゲームで得られる点数の期待値は何点になるか求めよ．