

# 物 理 学

## 【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で3問ある。3問すべてに解答せよ。
4. 解答用紙は、各問につき1枚、合計3枚であるから、確実に配布されていることを確かめること。
5. 各解答用紙の所定欄に、科目名・問題番号・受験番号および氏名を必ず記入すること。
6. 解答は、各問ごとに所定の解答用紙を使用すること。
7. 解答用紙は点線より上部が切り取られるから、裏面も使用する場合には、点線の上部を使用しないこと。
8. 解答用紙には、解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9. 解答できない場合でも、解答用紙に科目名・問題番号・受験番号および氏名を記入して提出すること。
10. 解答用紙を草稿用紙として使用してはならない。草稿用紙は問題より後のページにある。

# 物 理 学

## 【第1問】

平面上の質点（質量 $m$ ）の運動を考える．動径 $r$ ，方位角 $\theta$ の極座標系のもとで，質点は原点の向きに $m\mu/r^k$ の大きさの力を受けるものとする（ $\mu, k$ は定数かつ $\mu > 0, k > 1$ ）．このとき，以下の問いに答えよ．

なお， $r, \theta$ 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ とするとき，位置ベクトル $\mathbf{r}$ ，速度ベクトル $\mathbf{v}$ ，加速度ベクトル $\mathbf{a}$ はそれぞれ， $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ ， $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$ ， $\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{e}_\theta$ と表される（ $\dot{r}, \ddot{r}$ はそれぞれ $r$ の1階，2階時間微分を表す）．

- (1)  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ それぞれの方向の成分に関する質点の運動方程式を書け．
- (2) 質点の角運動量 $mh = m\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v})$ （ $\mathbf{k}$ は $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ に直交する単位ベクトル）は保存され，そのことを表す式は運動方程式の $\mathbf{e}_\theta$ 方向成分と一致する．この $h$ を用いて， $\mathbf{e}_r$ 方向成分の運動方程式を $\theta$ が現れない形で書け．
- (3) 質点が軌道半径 $r_0$ ，角速度 $\omega_0$ の等速円運動をするとき， $r_0$ と $\omega_0$ の関係を導け．
- (4) (3)の運動に対して軌道半径 $r_0$ に微小な擾乱 $\delta r$ が与えられたとき，その擾乱が時間とともに成長しないための条件を導け．
- (5) (2)で求めた運動方程式に $\dot{r}$ を乗じて時間積分し，力学的エネルギー保存則を導け．ただし，力学的エネルギーを表す積分定数を $E$ とする．
- (6) (5)で求めた力学的エネルギー $E$ は，速度の $\mathbf{e}_r$ 方向成分による運動エネルギーと，見かけのポテンシャル $U$ の和とみなすことができる． $U$ の極値 $U_0$ を求め， $E = U_0$ の状態が安定である条件を， $U$ の関数形に基づく議論から導け．

# 物 理 学

## 【第2問】

19世紀の前半、英国の科学者ファラデーは、電流が流れている銅線の周りに磁場ができるのであれば、磁場の周りに置かれた銅線にも電流が流れるのではないかと考えて色々な実験を行った。その結果、(a)回路を貫く磁束が時間的に変化すれば回路に電流が流れること、(b)磁場が時間的に変化しなくても、回路の一部が運動し磁場を取り囲む回路の面積が変化すると回路に電流が流れることを発見した。このファラデーの発見した電磁誘導の性質に関わる以下の設問に答えよ。

- (1) 図1のように、一様な磁束密度  $B$  の中に導体でできた間隔  $l$  のコの字型のレールがあり、質量  $m$  の導体棒が接触している。またレールの左端には電気抵抗  $R$  が組み込まれている。レールと導体棒との摩擦、左端の電気抵抗  $R$  以外の電気抵抗および回路の電流によって発生する磁場は無視できるとする。なお、磁場の向きはレールの置かれた平面に垂直方向とする。

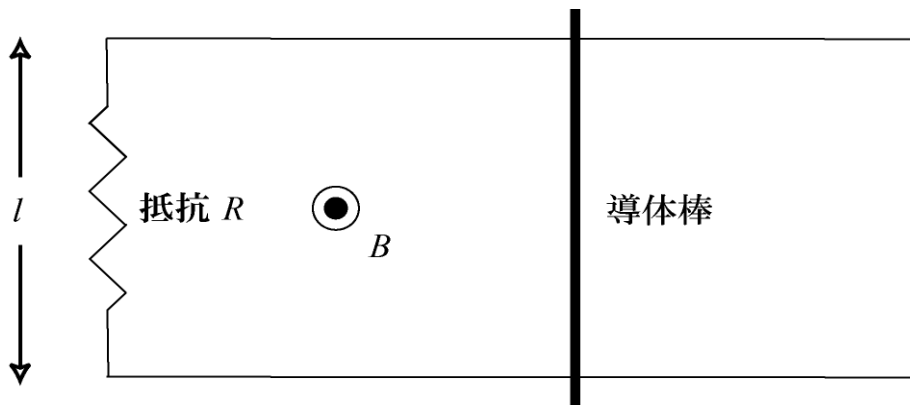


図1

- (1-1) 導体棒を速度  $v$  で右方向に動かしたとき発生する起電力  $E$  と導体棒を動かすために必要な外力  $F$  を求めよ。

(1-2) 導体棒は、時刻  $t=0$  において、左端から距離  $x$  の場所に静止していたとする。この状態から磁束密度  $B(t)$  を時間変化させたとき、導体棒の位置  $x(t)$  の時間発展を記述する微分方程式を求めよ。但し、磁束密度の時間変化により磁場の方向が反転することはないとする。

(1-3) (1-2) において、質量  $m$  がゼロの極限を考えたとき、磁束密度  $B(t)$  と距離  $x(t)$  の関係を求めよ。

(2) 次に、図2のように(1)で扱ったレールを水平面から角度  $\theta$  だけ傾けて、導体棒のレールに沿った運動を考える。なお、重力  $g$  は一様であるとし、磁束密度  $B$  は一様かつ鉛直上向きで、時間変化はしないものとする。

(2-1) 時刻  $t=0$  において導体棒から手を離す。レールをこる導体棒の速度を  $v$  としたとき、時刻  $t>0$  での導体棒の運動方程式を導け。

(2-2) (2-1) で求めた運動方程式から、 $t=0$  における速度を  $v=0$  として、 $t>0$  における導体棒の速度  $v$  を求めよ。

(2-3) 導体棒に及ぼす重力  $g$  による仕事率とジュール熱により消費される電力の差が、単位時間に導体棒が獲得する運動エネルギーに等しいことを示せ。

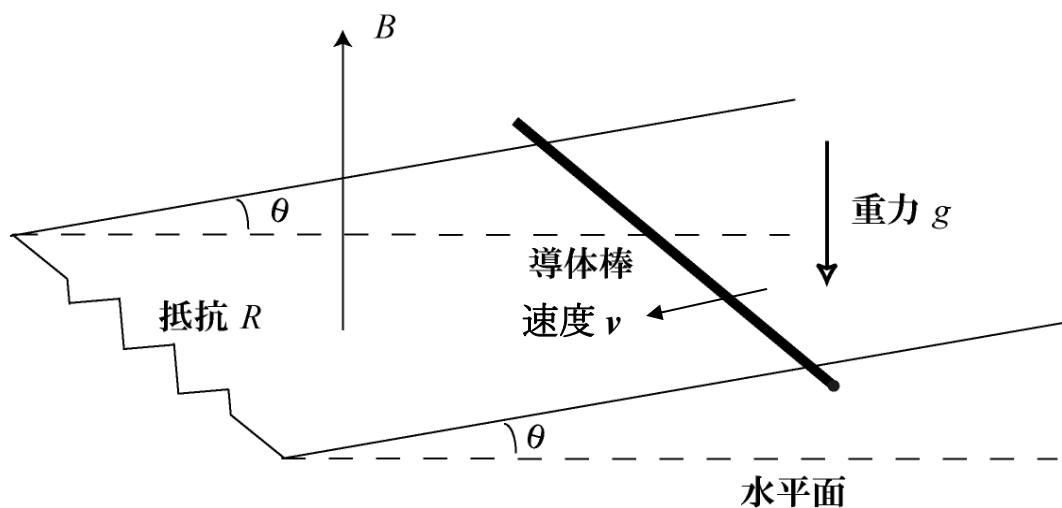


図2

# 物 理 学

## 【第3問】

雪・雨滴を含む雲や，火山灰を含む火山噴煙のような，気体と固体または液体の混合物の熱力学的性質について考える．今，密度 $\rho_s$  ( $\text{kgm}^{-3}$ )の固体粒子と理想気体が重量比 $(1-n):n$ で均質に混ざった混合物を想定する．この混合物の収縮や膨張に伴う密度変化や温度変化に関する設問に答えよ．

なお，解答にあたっては以下を前提とし，できるだけ導出過程も記すこと．

- (a) 固体の粒子は瞬時に気体と熱平衡に達する．
- (b) 理想気体の状態方程式は，圧力 $P$  (Pa)，単位質量(1 kg)当たりの体積 $V$  ( $\text{m}^3\text{kg}^{-1}$ )，温度 $T$  (K)，気体定数 $R$  ( $\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ )を用いて $PV=RT$ で表される．
- (c) 混合物の定積比熱 $C_m$  ( $\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ )は，固体の比熱 $C_s$  ( $\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ )と理想気体の定積比熱 $C_v$  ( $\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ )を用いて $C_m=nC_v+(1-n)C_s$ で表される．
- (d) 単位質量の混合物の内部エネルギー $U$ は温度のみの関数で，その変化は $dU=C_m dT$ で表される．
- (e) 単位質量の混合物の内部エネルギー $U$ ，体積 $V$ ，エントロピー $S$ の平衡状態間の変化について $dU = -PdV+TdS$ という関係が成り立つ．

(1) 純粋な理想気体 ( $n=1$  の場合) について以下の小問に答えよ．

(1-1) この気体の密度を  $P$ ， $T$ ， $R$  を用いて表せ．

(1-2) 圧力 $P_0$ ，温度 $T_0$ の純粋な理想気体を $P_1$  ( $< P_0$ )まで等エントロピー過程で減圧し，膨張させた．そのときの温度を $P_1$ ， $P_0$ ， $T_0$ ， $R$ ， $C_v$ を用いて表せ．

(1-3) (1-2) のように $P_0$ から $P_1$ まで等エントロピー過程で減圧したとき，減圧後の理想気体の密度を減圧前の密度 $\rho_0$ と $P_1$ ， $P_0$ ， $R$ ， $C_v$ を用いて表せ．

(2) 一般の混合物 ( $0 < n < 1$  の場合) について以下の小問に答えよ．

(2-1) 単位質量 (1 kg) の混合物中で固体粒子が占める体積と気体が占める体積を $P$ ， $T$ ， $R$ ， $n$ ， $\rho_s$ を用いて表せ．

- (2-2) 混合物の密度を $P$ ,  $T$ ,  $R$ ,  $n$ ,  $\rho_s$ を用いて表せ.
- (2-3) (1-2)と同様に, 圧力 $P_0$ , 温度 $T_0$ の混合物を $P_1$  ( $<P_0$ )まで等エントロピー過程で減圧し, 膨張させた. そのときの温度を $P_1$ ,  $P_0$ ,  $T_0$ ,  $R$ ,  $n$ ,  $C_m$ を用いて表せ.
- (2-4) (2-3)のように $P_0$ から $P_1$ まで等エントロピー過程で減圧したとき, 減圧後の混合物の密度を減圧前の密度 $\rho_0$ と $P_1$ ,  $P_0$ ,  $R$ ,  $n$ ,  $\rho_s$ ,  $C_m$ を用いて表せ.