平成２０年度大学院理学系研究科地球惑星科学専攻
修士課程入学試験問題（一般教育科目）

数　　学

【注意事項】

１．試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
２．解答には，必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること．
３．問題は全部で３問ある．３問すべてに解答せよ．
４．解答用紙は，各問につき１枚，合計３枚であるから，確実に配布されていることを確かめること．
５．各解答用紙の所定欄に，科目名・問題番号・受験番号および氏名を必ず記入すること．
６．解答は，各問ごとに所定の解答用紙を使用すること．
７．解答用紙は点線より上部が切り取られるから，裏面も使用する場合には，点線の上部を使用しないこと．
８．解答用紙には，解答に関係ない文字，記号，符号などを記入してはならない．
９．解答できない場合でも，解答用紙に科目名・問題番号・受験番号および氏名を記入して提出すること．
１０．解答用紙を草稿用紙として使用してはならない．草稿用紙は問題より後のページにある．

数　学

【第１問】

下記の（１）～（４）のすべてに解答せよ．

（１）　$\alpha > 0$ で定義された関数を

$$F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha^2} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$$

としたとき，$\dfrac{dF(\alpha)}{d\alpha}$ を求めよ．

（２）　周囲の長さが一定の二等辺三角形のうち，面積が最大になるものを求め，その理由を示せ．

（３）　次の微分方程式を解け．ただし，y' は $\dfrac{dy}{dx}$ を意味する．

$$y' = \frac{3xy}{1 + x^2}$$

（４）　以下の行列 A の固有値およびその右固有ベクトル，左固有ベクトルを計算せよ．

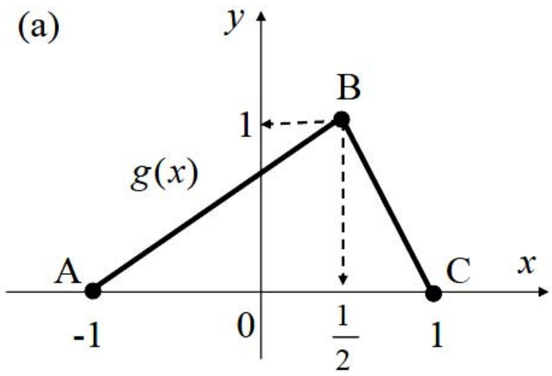
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

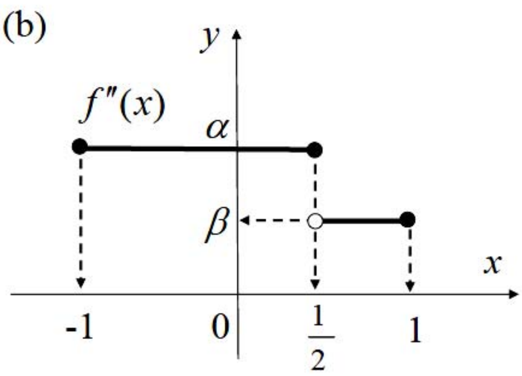
備考：右固有ベクトル $\mathbf{x}$ は　$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$　を満たし，左固有ベクトル $\mathbf{y}$ は ${}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}A = \lambda {}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$　を満たす（λ は固有値，$\mathbf{x}$ および $\mathbf{y}$ は列ベクトル，${}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$ はベクトル $\mathbf{y}$ の転置ベクトルをあらわす）．

数　学

【第２問】

図(a)のように，$x-y$ 座標上の３点 $\mathrm{A}(-1,0)$，$\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},1\right)$，$\mathrm{C}(1,0)$ をつなぐ折れ線関数 $g(x)$ がある．これをある関数 $f(x)$ によって区間 $[-1,1]$ 上で近似することを考える．このとき，次の問いに答えよ．





（１）　関数 $f(x)$ の２次導関数 $f''(x)=\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$ が，図(b)のように x 軸上の２つの区間 $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$ と $\left(\frac{1}{2},1\right]$ 上でそれぞれ値 α と β を持つ階段関数になった．このとき，$f(x)$ の一般解を α と β を用いて表せ．

（２）　さらに，関数 $f(x)$ が点Ａ，Ｂ，Ｃを通り，かつ全区間で滑らか（$f(x)$ および１次導関数 $f'(x)$ が $[-1,1]$ で連続）となるようにする．このとき，α と β を $\gamma=f'\left(\frac{1}{2}\right)$ を用いて表せ．

（３）　（２）のとき，$|f(x)-g(x)|$ の区間 $[-1,1]$ における最大値が最小になるように α と β を求めよ．

数　学

【第３問】

中身が見える透明な箱が左に４つ，右に５つある．それぞれの箱にカードを１枚ずつ入れる．カードを入れるときは，そのとき空いている箱のなかのひとつにランダム（無作為）に入れる．入れるカードはそれぞれＡ，Ｂ，Ｃ，Ｄと書かれた４枚の赤いカードと，それぞれＥ，Ｆ，Ｇ，Ｈ，Ｉと書かれた５枚の青いカード，計９枚である．

（１）　まず，ランダムに選んだ赤いカード１枚を空いている９つの箱のどれかに入れる．次に，残りの３枚の赤いカードからランダムに選んだ１枚を空いている８つの箱のどれかに入れる．残った赤いカードについても同様にする．その後，５枚の青いカードからランダムに選んだ１枚を空いている５つの箱のどれかに入れる．残りの４枚の青いカードからランダムに選んだ１枚を空いている４つの箱のどれかに入れ，残りの青いカードについても同様にする．

赤いカードの配分は４－０（左の箱に計４枚，右の箱に計０枚），３－１（左に３枚，右に１枚），２－２（左に２枚，右に２枚），１－３（左に１枚，右に３枚），０－４（左に０枚，右に４枚）のいずれかである．それぞれの確率を計算せよ．

（２）　上のようにカードを入れた後，まず左の箱の中から１枚，そして右の箱の中から１枚，次に左から２枚目，右から２枚目と，計４枚引く．左もしくは右の箱のなかから引くときには，以下の優先順位で引く．

［１］赤いカードＡまたはＢ（両者があるなら，１／２の確率でどちらか）
［２］赤いカードＣまたはＤ（両者があるなら，１／２の確率でどちらか）
［３］青いカード

上述のように引いた結果，最初に引いた３枚は左から「Ａ」，右から「Ｃ」，左から「Ｂ」であった．このとき，最後のカード（右から引く２枚目のカー

ド）が「D」である確率および青いカードである確率をそれぞれ計算せよ．