

平成19年度大学院理学系研究科地球惑星科学専攻
修士課程入学試験問題（一般教育科目）

数 学

【注意事項】

- 1 . 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
- 2 . 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
- 3 . 問題は全部で3問ある。3問のすべてに解答せよ。ただし第1問では問1から問6のうち任意の4つを選び解答せよ。
- 4 . 答案用紙は、各問につき1枚、合計3枚であるから、確実に配布されていることを確かめること。
- 5 . 各答案用紙の所定欄に、科目名・問題番号・受験番号および氏名を必ず記入すること。
- 6 . 解答は、各問ごとに所定の答案用紙を使用すること。
- 7 . 答案用紙は点線より切り取られるから、裏面も使用する場合には、点線の上部を使用しないこと。
- 8 . 答案用紙には、解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
- 9 . 解答できない場合でも、答案用紙に科目名・問題番号・受験番号および氏名を記入して提出すること。
- 10 . 答案用紙を草稿用紙として使用してはならない。草稿用紙は問題より後のページにある。

数 学

【第 1 問】

下記の問 1 ~ 問 6 の中から 4 問選んで解答せよ .

問 1 . 次の行列の固有値 , および対応する長さ 1 の固有ベクトルを求めよ .

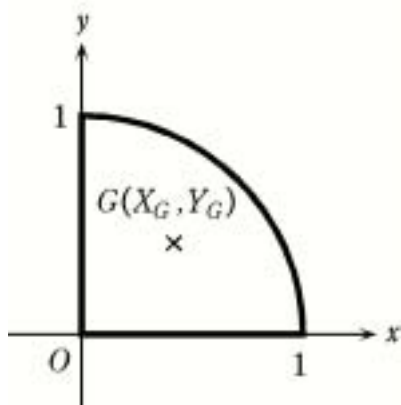
$$\begin{pmatrix} 6 & 11 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

問 2 . 微分方程式

$$y'' - 4y' + 29y = e^{-2x}$$

を解け . ただし , y' および y'' は , y の x による 1 階および 2 階微分である .

問 3 . 原点 $O(0,0)$ を中心とする円 $x^2 + y^2 = 1$ の第 1 象限部分 ($x \geq 0, y \geq 0$) で表される図形 (下図の太線で囲まれた部分) の重心の座標 $G(X_G, Y_G)$ を求めよ .



問 4 . 3 次元直交座標 $O-xyz$ の上に 3 点 $A(3,1,0)$, $B(2,4,1)$, $C(1,2,2)$ がある . このとき三角形 ABC の面積を求めよ .

問5 . 次の設問 (1), (2) に答えよ .

(1) $y = \log(x + \sqrt{1+x^2})$ のとき , その微分 dy/dx を求めよ .

(2) 原点 $O(0,0)$ から点 $P(x, x^2/2)$ までの区間の放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ に沿った長さを求めよ .

問6 . さいころには立方体の6つの各面に1から6までの「数値」を表す文字が書かれている . (1), (2) のおのおの場合について , 異種のさいころが何種類できるか答えよ . ただし , 2つのさいころ A, B があって , B のさいころを適当な回数 , 回転操作することによって6つの面に書かれた「数値」を A と同じ向きに置くことが可能な場合 , さいころ A, B を同種のさいころとみなす . また , さいころの各面に書かれた文字の向きが異なっても , 「数値」が同じ場合 , 同種とみなす .

(1) ふつうのさいころは , ある面の数値と , その裏面 (正反対の面) の数値の合計が常に7である . この条件を満足するさいころは , 何種類できるか .

(2) (1) の条件を満たさなくてよいとすれば , 何種類できるか .

数 学

【第2問】

(1) 関数 $y = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ を考える .

$x \rightarrow 0$ と $x \rightarrow \pm\infty$ のときの y の値をそれぞれ求めよ .

(2) 関数 $y = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ のグラフの概略を示せ . ただし , 同じ図に $y = \pm x$ のグラフも記入すること .

(3) 高階の微分方程式の解法はいろいろ提案されているが , ここでは ,
 $A_0, A_1, \dots, B_1, B_2, \dots$ を定数とし ,

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \frac{B_3}{x^3} + \dots$$

の形を仮定する . このとき , 微分方程式 $x^4 y'' + y = 0$ の一般解を A_0, A_1 および x を用いて二つの級数の和の形で示せ . ただし , y'' は , 関数 y の x に関する 2 階微分を表す .

(4) (3) の解について , これを三角関数を用いて表せ .

数 学

【第3問】

2次形式

$$cx^2 + cy^2 + 2z^2 + 2(2-c)xy - \sqrt{2}yz - \sqrt{2}zx = 1 \quad (\text{a})$$

について、以下の設問に答えよ。ただし、 c は定数とする。

(1) ベクトル $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, および対称行列 A を用いて、式(a)を ${}^t\bar{x}A\bar{x} = 1$ と表

したときの A を求めよ。ただし、 ${}^t\bar{x}$ は \bar{x} の転置ベクトルを表す。

(2) A の固有値の一つは 1 である。他のすべての固有値を求めよ。また、式(a)を満たす集合が楕円面となるための c の条件を求めよ。

(3) 固有値 1 に対する固有ベクトル \bar{e}_1 の成分 $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ を求め、さらに

$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ が式(a)を満たすことを示せ。ただし、 $|\bar{e}_1| = 1$, $x_1 > 0$ とする。

(4) 式(a)であらわされる楕円体の体積が $\frac{\pi}{3}$ となるときの c の値を求めよ。