平成１８年度大学院理学系研究科地球惑星科学専攻
修士課程入学試験問題（一般教育科目）

物　理　学

【注意事項】

１．試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
２．解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
３．問題は全部で３問ある。３問のすべてに解答せよ。
４．答案用紙は、各問につき１枚、合計３枚であるから、確実に配布されていることを確かめること。
５．各答案用紙の所定欄に、科目名・問題番号・受験番号および氏名を必ず記入すること。
６．解答は、各問ごとに所定の答案用紙を使用すること。
７．答案用紙は点線より切り取られるから、裏面も使用する場合には、点線の上部を使用しないこと。
８．答案用紙には、解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
９．解答できない場合でも、答案用紙に科目名・問題番号・受験番号および氏名を記入して提出すること。
１０．答案用紙を草稿用紙（問題より後のページにある。）に絶対使用しないこと。

物理学

【第１問】

重力加速度の大きさを g とし、以下において、その値を一定とする。また、円周率をπで表す。

(1) 図１に示すように、一様な密度ρ_0を持つ液体に、一様な密度ρ_1 ($\rho_0 > \rho_1$)を持つ一辺の長さLの立方体が浮いている状態を考える。立方体が釣り合いの位置で静止しているとき、立方体のうち液体上面よりも上に出ている部分の高さhを求めよ。

(2) (1)で考えた状態に対して、立方体の上面と液体上面の距離がΔhだけ短くなるように立方体を液体中に押し込んだ場合、立方体が受ける力の大きさFを求めよ。この状態から立方体を自由に運動させると、立方体は上下方向に振動を開始する。その振動の周期Tを求めよ。ただし、液体の粘性および立方体の上下に伴う液面の上下は無視できるものとし、立方体の運動に伴って液体に波が発生することも考えないものとする。

(3) 図２に示すように、鉛直方向に密度が変化する液体の中に半径aの球形の物体が存在する状態を考える。鉛直上方にz軸をとるとき、液体の密度ρは$\rho = \rho_0 - \Gamma z$ ($\Gamma > 0$)と表されるものとする。球形の物体の密度はρ_0であるとし、物体が液体中を運動しても液体の密度分布は影響を受けないものとする。釣り合いの位置$z = 0$で静止している物体に力を加えて$z = z_0$まで準静的に移動させるとき、物体に対してなされる仕事の大きさWを求めよ。ただし、物体の大きさは液体の密度変化の空間スケールに比べて無視できるほど小さいとして扱ってよい。

(4) (3)で考えたように物体に外的な力を加え、$z = z_0$で静止させる。これを初期状態とし、時刻$t = 0$においてその外的な力を取り除き、それ以降この物体を自由に運動させる。このとき、物体の位置zを時刻tの関数として表せ。ただし、液体の粘性は無視できるものとする。

(5) (4)で考えた物体の運動に対して、物体が運動速度に比例した粘性抵抗力を受ける場合を考える。粘性抵抗力はストークスの法則に従うものだけを考え、その大きさは物体の速度vに対して$6\pi a \eta v$ (ηは粘性係数)で表されるとする。このとき、物体の運動が振動を伴うためのΓの条件を求めよ。また、振動を生じる場合について、物体の位置zを時刻tの関数として表せ。なお、必要であれば

$$k = \frac{9}{4}\frac{\eta}{\rho_0 a^2},\quad N = \sqrt{\frac{g\Gamma}{\rho_0}}$$

で定義されるk, Nを用いて解答してもよい。

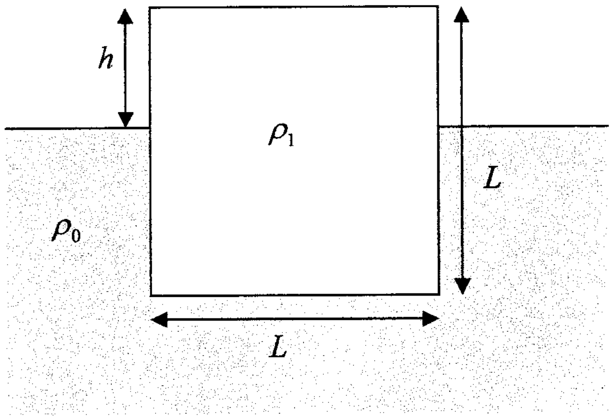

図 1

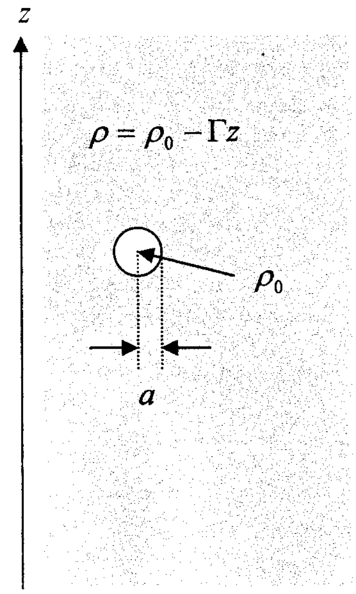

図 2

物理学

【第２問】

１成分Ａからなる系において、Ａの化学ポテンシャル μ_A は、温度 T、圧力 P の関数として与えられ、

$$d\mu_A = -s_A dT + v_A dP \quad \cdots\cdots ①$$

という関係がある。ただし、s_A はＡのモルエントロピー（１モルあたりのエントロピー）、v_A はＡのモル体積（１モルあたりの体積）である。以下はすべて、一定温度 T で考えるものとする。

（１）１成分Ａからなる理想気体 (Gas) を考える。圧力 P_0 におけるＡの化学ポテンシャルが $\mu_A^G(P_0)$ と与えられるとき、圧力 P におけるＡの化学ポテンシャル $\mu_A^G(P)$ は、

$$\mu_A^G(P) = \mu_A^G(P_0) + RT\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) \quad \cdots\cdots ②$$

と与えられることを、以下の手順で確認せよ。R は気体定数である。

(a) 考えている系の温度を T、圧力を P、体積を V、モル数を n とする時、式 ① に基づき、化学ポテンシャルの圧力による偏微分係数 $\left(\frac{\partial \mu_A^G}{\partial P}\right)_T$ をこれらの変数を用いて表せ。

(b) 理想気体では、$PV=nRT$ という関係式が成り立つ。このことを用いて、(a) で求めた偏微分係数 $\left(\frac{\partial \mu_A^G}{\partial P}\right)_T$ を温度 T、圧力 P の関数として表せ。

(c) (b)の結果を圧力 P について積分するとどうなるか。その結果について 20 字以内で解説せよ。

（２）１成分Ａからなる液体 (Liquid) を考える。（１）にならって、圧力 P_0 におけるＡの化学ポテンシャルが $\mu_A^L(P_0)$ と与えられるとき、圧力 P におけるＡの化学ポテンシャル $\mu_A^L(P)$ を求めよ。ただし、Ａのモル体積を v_A^L とし、圧力の変化による液体のモル体積の変化を無視せよ。

（3） 成分 A の溶媒に成分 B の溶質が溶け込んだ希薄溶液 (Dilute Solution) を考える。溶質 B のモル濃度を x とする。圧力 P において、A の純溶媒の化学ポテンシャルが $\mu_A^L(P)$ と与えられるとき、希薄溶液における A の化学ポテンシャル $\mu_A^{DS}(P,x)$ は、

$$\mu_A^{DS}(P,x) = \mu_A^L(P) + RT\ln(1-x) \quad \cdots\cdots ③$$

と与えられる。

(a) 図 1 のように、この希薄溶液と A の蒸気が平衡にある系を考え、この時の蒸気圧を P とする。また、A の純溶媒の飽和蒸気圧を P_0 とする。（1）、（2）の結果を用いて、蒸気圧降下 $\Delta P = -(P - P_0)$ を求めよ。(平衡状態では、成分 A の化学ポテンシャルが気相と液相で等しくなることを用いよ。また、$x << 1$, $\Delta P << P_0$ として、$\varepsilon << 1$ において成り立つ近似式 $\ln(1-\varepsilon) \simeq -\varepsilon$ を用いよ。)

(b) 図 2 のように、この希薄溶液と A の純溶媒とが半透膜（成分 A のみを通し、成分 B を通さない膜）を介して平衡にある系を考える。この時の純溶媒の圧力を P_0、希薄溶液の圧力を P とする時、浸透圧 $\Delta P = P - P_0$ を求めよ。

(c) (a)で求めた蒸気圧降下の大きさと(b)で求めた浸透圧の大きさを比較し、どちらがどの程度（１０の何乗程度）大きいか述べよ。推論の過程を含めて 100 字程度にまとめよ。

（ヒント：常温常圧における理想気体のモル体積と水のモル体積を見積もり、比較せよ。必要があれば、気体定数 R が 8.3Jmol^{-1}K^{-1}であることを用いよ。）

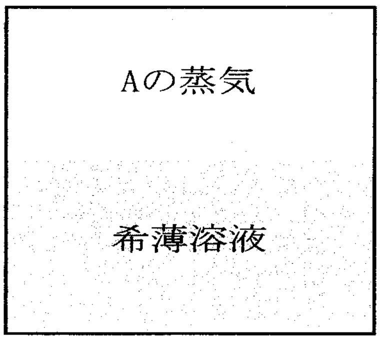

図 1

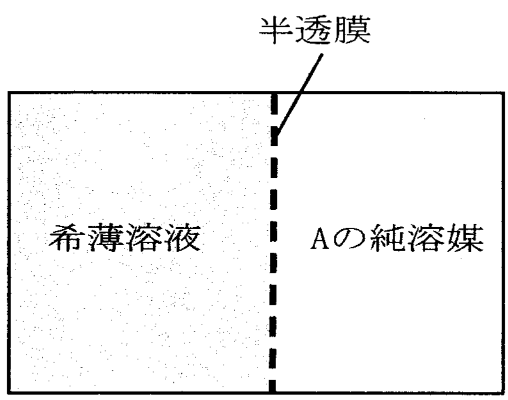

図 2

物理学

【第３問】

図のように、真空中に非常に薄くて厚さの無視できる長さ L の細長い円筒状の完全導体が中心軸を一致させた状態で３重に置かれている。最も内側の円筒 A の半径を a, 中間の円筒 B の半径を b, 最も外側の円筒 C の半径を c とする。円筒 C は接地されており、その電位は 0 である。真空の誘電率を ε_0 として以下の問いに答えよ。

（１） 外部から円筒 B に電荷 q を与えた。この時の円筒 B の電位 V を求めたい。ただし、円筒は十分に長いものとし、両端で電場が円筒間から外に漏れ出す効果は無視できるものとする。また、円筒 A はどこにも接続せず、電荷も与えないものとする。

(a) 円筒 C と円筒 B の間の半径 r（$b < r < c$）の場所における電場ベクトル $\vec{E}$ の円柱座標系（r, θ, z）における３成分を（E_r, E_θ, E_z）、電位を ϕ とする。このとき（E_r, E_θ, E_z）を ϕ を用いて表せ。ただし、E_r は円筒の半径方向の電場成分、E_θ は円筒の円周方向の電場成分、E_z は円筒の中心軸に沿った方向の電場成分であり、円柱座標系における $\mathbf{grad}\,\phi$ の３成分は $\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial r}, \dfrac{\partial\phi}{r\partial\theta}, \dfrac{\partial\phi}{\partial z}\right)$ である。なお、円筒の形状は z 軸方向に変化しないこと、中心軸に対して対称であることから、物理量が z 方向、θ 方向に変化しないことを考慮せよ。

(b) 積分形の Gauss の定理を適用し、E_r, E_θ, E_z を r, q, L, ε_0 を用いて表せ。

(c) 上の (a) と (b) の結果に基いて、円筒 B の電位 V を b, c, q, L, ε_0 を用いて表せ。

（２）円筒 C と円筒 B の間の静電容量 C_o および円筒 B と円筒 A の間の静電容量 C_i を a, b, c, L, ε_0 を用いて表せ。なお、静電容量は円筒の接地状態によらず、電極の形状と電極間の物質のみで決まることに留意せよ。

（３）円筒 A も接地して電位を 0 とし、外部から円筒 B に電荷 q を与えた。以下の問いに答えよ。なお、必要であれば $C_t \equiv C_o + C_i$ と定義される C_o と C_i の合成静電容量 C_t を用いて解答してもよい。

(a) 円筒 B の電位 V を q, C_o, C_i を用いて表せ。

(b) この状態から時刻 t_0 に円筒 B を抵抗 R で接地した。t_0 以降、時刻 $t\left(t > t_0\right)$における、円筒 B の電位 V_m を q, C_o, C_i, t_0, t, R を用いて表せ。

(c) (3) の (b) において、時刻 t における、円筒 C に生じる電荷 q_o、円筒 B の上の電荷 q_m、円筒 A に生じる電荷 q_i それぞれについて q, C_o, C_i, t_0, t, R を用いて表せ。