平成１８年度大学院理学系研究科地球惑星科学専攻
修士課程入学試験問題（一般教育科目）

数　　学

【注意事項】

１．試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
２．解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
３．問題は全部で３問ある。３問のすべてに解答せよ。ただし第１問では問１から問５のうち任意の４つを選び解答せよ。
４．答案用紙は、各問につき１枚、合計３枚であるから、確実に配布されていることを確かめること。
５．各答案用紙の所定欄に、科目名・問題番号・受験番号および氏名を必ず記入すること。
６．解答は、各問ごとに所定の答案用紙を使用すること。
７．答案用紙は点線より切り取られるから、裏面も使用する場合には、点線の上部を使用しないこと。
８．答案用紙には、解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
９．解答できない場合でも、答案用紙に科目名・問題番号・受験番号および氏名を記入して提出すること。
１０．答案用紙を草稿用紙（問題より後のページにある。）に絶対使用しないこと。

数　　学

【第１問】

下記の問１－問５の中から４問選んで解答せよ．

問１．次の問に答えよ．

(1) 連立一次方程式　$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$　を解け．ただし，

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$ である．

(2) $\mathbf{A}$ の行列式の値を求めよ．

問２．次の関数を $x=0$ の近傍でテーラー展開して，(1) では x の２次以上，(2) では x の３次以上の高次項を省いて，これらの関数の近似式を求めよ．また，$x=0.1$ での近似値を求め，小数点以下２桁まで記せ．

(1) $y=\sin x+\log(x+1)$

(2) $y=\cos 4x$

問３．次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-5\dfrac{dy}{dx}-6y=0$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-6\dfrac{dy}{dx}+9y=0$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}-2y=x$

問４．$f(z)=z^3+z+e^z$ の場合に，$f(z)$ を実部 u と虚部 v に分け $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ と表す．ただし，$z=x+iy$，i は虚数単位（$\sqrt{-1}$）である．このとき，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ を求めよ．

問５．赤い玉３個，白い玉２個入った壷から無作為に一個ずつ玉を取り出し，色を確認したあと，元に戻す．取り出す作業を 10 回行ったとき，白い玉の出る回数 x の確率分布とその平均を求めよ．

数　学

【第２問】

以下のような対角成分のすべてが a、非対角成分のすべてが b の n 次対称行列 $\mathbf{A}$ を考える．ただし n は自然数，a，b は０でない実数とする．

$$\mathbf{A}=\underbrace{\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}}_{n\,列}\updownarrow n\,行$$

(1) $n=2$ の場合について，$\mathbf{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) $\mathbf{A}$ 及びその m 乗 $\mathbf{A}^m$（m は自然数）は，すべての要素が１の n 次正方行列 $\mathbf{M}$ と n 次単位行列 $\mathbf{I}$ を用いて，$\mathbf{A}^m = x_m\mathbf{I}+y_m\mathbf{M}$ と書ける．(x_m, y_m) を $m=1$ と２の場合について求めよ．

ただし，

$$\mathbf{I}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \mathbf{M}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}\text{である．}$$

(3) (2)の x_m と y_m を要素とする列ベクトル $\mathbf{X}_m=\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix}$ について，漸化式 $\mathbf{X}_{m+1}=\mathbf{C}\mathbf{X}_m$ が成り立つ．このとき以下の問いに答えよ．

(a) 行列 $\mathbf{C}=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$ を求めよ．

(b) 行列 $\mathbf{C}$ の固有ベクトルを求め，$\mathbf{X}_1$ をその固有ベクトルの線形結合として書き表せ．

(4) $\mathbf{A}^\infty = \lim_{m\to\infty}\mathbf{A}^m$ が零行列でない行列に収束するための条件を求めよ．また，収束したときの $\mathbf{A}^\infty$ を示せ．

数　　学

【第３問】

区分的になめらかな関数 $f(t)$ に対し，そのフーリエ変換を $F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$ と定義する．また，関数 $f_1(t)$，$f_2(t)$ に対して，$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$ はコンボリューションと呼ばれる．これらについて以下の問いに答えよ．

(1) 次の関数のフーリエ変換を求めよ．ただし $\alpha>0$ とする．

$$g(t)=\begin{cases}\beta e^{-\alpha t} & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

(2) 次の関数のフーリエ変換を求めよ．

$$h(t)=\begin{cases}1 & |t|\leq 1\\ 0 & |t|>1\end{cases}$$

(3) $f_1(t)$，$f_2(t)$ に対し，フーリエ変換 $F_1(\omega)$，$F_2(\omega)$ が存在するとき，コンボリューションのフーリエ変換を $F_1(\omega)$，$F_2(\omega)$ を用いて表せ．

(4) (1)-(3)の結果を利用して，次の関数のフーリエ変換を求めよ．

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{\alpha}\left[e^{-\alpha(t-1)}-e^{-\alpha(t+1)}\right] & t\geq 1\\[2ex] \dfrac{\beta}{\alpha}\left[1-e^{-\alpha(t+1)}\right] & -1\leq t<1\\[2ex] 0 & t<-1\end{cases}$$