平成17年度大学院理学系研究科地球惑星科学専攻
修士課程入学試験問題(一般教育科目)

数　学

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆(または黒色シャープペンシル)を使用すること。
3. 問題は全部で3問ある。3問のすべてに解答せよ。ただし第1問では問1から問6のうち任意の4つを選び解答せよ。
4. 答案用紙は、各問につき1枚、合計3枚であるから、確実に配布されていることを確かめること。
5. 各答案用紙の所定欄に、科目名・問題番号・受験番号および氏名を必ず記入すること。
6. 解答は、各問ごとに所定の答案用紙を使用すること。
7. 答案用紙は点線より切り取られるから、裏面も使用する場合には、点線の上部を使用しないこと。
8. 答案用紙には、解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名・問題番号・受験番号および氏名を記入して提出すること。
10. 答案用紙を草稿用紙に絶対使用しないこと(草稿用紙は問題より後のページにある。)

数　学

【第1問】

下記の問1ー問6の中から4つ選び解答せよ．なお計算過程も簡潔に書くこと．

問1（解析学基礎）

次の極限を計算せよ．

(1) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$　　　(2) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}$

問2（複素数）

i^i をすべて求めよ．なお複素数でのべき乗は $a^b=\exp(b\log a)$ と定義される．但し i は虚数単位であり，$\log$ は自然対数である．

問3（ベクトル解析）

$\mathbf{u}=(y^2+z^2,\ z^2+x^2,\ x^2+y^2)$ のとき，下記を計算せよ．

(1) $\operatorname{div}\mathbf{u}$　　(2) $\operatorname{rot}\mathbf{u}$　　(3) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{u})$

問4（ラプラス変換）

$t>0$ で定義される関数 $f(t)$ に関して，s を複素数として $F(s)=\displaystyle\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}dt$ が存在するとき，

これを関数 $f(t)$ のラプラス変換と言い，$L[f(t)]$ と表す．このとき，

(1) $L[t]$ を求めよ．　　(2) $L[f(t)/t]$ を $F(s)$ を用いて表せ．

問5 (条件付き極値問題)

$f(x,y)=x^2+y^2-1=0$ の条件下で $h(x,y)=x+y$ の極値を求めよ．また，そのときの x と y の値も記せ．

問6（統計）

一様乱数発生器を使って[0,1]の範囲の実数をN個発生させた．

(1) Nを十分大きく取った時の平均値，分散を計算せよ．

(2) この乱数発生器で 10 個の実数を発生させ，この標本平均を計算する．これを何度も繰り返したときの標本平均の期待値，標本平均の分散の期待値を求めよ．

数　学

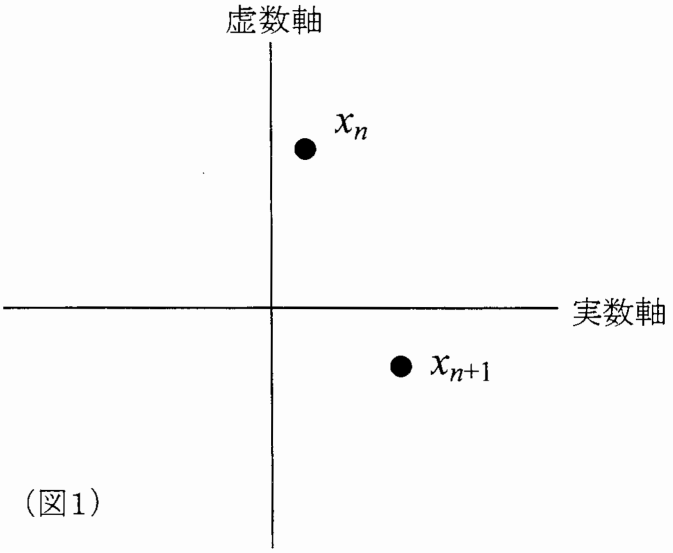
【第2問】

漸化式 $x_{n+2}-\sqrt{2}x_{n+1}+x_n=0$（$n$ は正の整数）で与えられる複素数の数列 $\{x_n\}$ について以下の問いに答えよ.

(1) $x_1=1$, $x_2=(1+i)/\sqrt{2}$（i は虚数単位）のとき, $x_3\sim x_5$ を求め, 横軸を実数軸, 縦軸を虚数軸とした複素平面上で $x_1\sim x_5$ を図示せよ.

(2) x_1, x_2 が任意の複素数として与えられたとき, x_n, x_{n+1}, x_{n+2} は複素平面上でどのような位置関係にあるか図示するとともに言葉で簡単に記述せよ. 但し, x_n, x_{n+1} は複素平面上でそれぞれ第1象限, 第4象限にあり図1のような位置関係になっているとする.

(3) $x_1=a$, $x_2=b$（a, b は複素数）のとき, 漸化式を解くことにより, x_n を a, b, n からなる1つの式で表せ.



（図1）

数　　学

【第３問】
変数xを時間tの関数とする．今，次の常微分方程式を考える．

$$\ddot{x} - x + \delta\dot{x} + x^3 = 0$$

但し，δは正の実数とする．また，上付のドットは時間微分を表す$\left(\dot{x} = \dfrac{dx}{dt},\ \ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}\right)$.

この方程式を満たす解の挙動を，以下の問いに従って調べよ.

(1)　上記の２階常微分方程式を$x = x_1,\ \dot{x} = x_2$とおくことにより，同値な連立１階常微分方程式系に直せ．また，この方程式系の平衡点（時間的に変化しない解）を求めよ．

(2)　(1)で求めた常微分方程式系は，$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$とおくと，$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$と表される．この微分方程式系を各平衡点近傍で線形化した連立１階常微分方程式を求めよ．

［ヒント］ベクトル場の微分方程式は平衡点近傍で Taylor 展開して，その第１項までとると，線形化された微分方程式が求まる．つまり，平衡点を$\mathbf{x}_0$，$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$とおくと，線形化された方程式$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}$は,

$$\dot{\xi}_i = \sum_{j=1}^{2} a_{ij}\xi_j,\ a_{ij} = \left.\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$$ で与えられる．

(3)　(2)で求めた線形化された微分方程式を$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$と表す.

行列の指数関数は$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{E} + \mathbf{A} + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\mathbf{A}^n + \cdots$で定義され，$\frac{d}{dt}e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{A}e^{t\mathbf{A}}$を満足するので，$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$の解$\boldsymbol{\varphi}(t)$で初期条件$\boldsymbol{\varphi}(0) = \mathbf{x}_0$を満足するものは，$\boldsymbol{\varphi}(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{x}_0$で与えられる．ここで，$\mathbf{E}$は単位行列を表す．さらに，方程式の線形化は座標系によらないので，$\mathbf{A}$の固有値を調べることにより平衡点近傍での解の挙動を知ることができる．

$\mathbf{A}$の固有値として実数を持つ平衡点はどれか. またその平衡点近傍に$\mathbf{x}_0$があるときの，解の軌道（(x_1, x_2)平面でtの増加に伴って解が描く曲線）の概略を図示せよ．
但し，ここで，δは$0 < \delta < \sqrt{8}$の範囲の値をとるものとする．