

平成16年度大学院理学系研究科地球惑星科学専攻
修士課程入学試験問題（一般教育科目）

数 学

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で3問ある。3問のすべてに解答せよ。ただし第1問では問1から問6のうち任意の4つを選び解答せよ。
4. 答案用紙は、各問につき1枚、合計3枚であるから、確実に配布されていることを確かめること。
5. 各答案用紙の所定欄に、科目名・問題番号・受験番号および氏名を必ず記入すること。
6. 解答は、各問ごとに所定の答案用紙を使用すること。
7. 答案用紙は点線より切り取られるから、裏面も使用する場合には、点線の上部を使用しないこと。
8. 答案用紙には、解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名・問題番号・受験番号および氏名を記入して提出すること。
10. 答案用紙を草稿用紙に絶対使用しないこと（草稿用紙は問題より後のページにある。）

数 学

[第1問]

次の6個の問いのなかから、任意の4問を選び解答せよ。何番の問いを選んだのかは、解答用紙上で各問の答案文記述の先頭に明記すること。

問1. [立体図形]

3次元直角座標 $O-x, y, z$ において、3点 A, B, C の座標を $A(1, 0, 0), B(0, 2, 0),$ および $C(0, 0, 3)$ とする。原点 $O(0, 0, 0)$ から三角形 ABC に下した垂線の長さを求めよ。

問2. [ベクトル解析]

3次元空間のベクトル関数 $\vec{u}(u, v, w) = (2x - 3y + z, 5y - 2z, 7x + 4y - 3z)$ があるとき、 $\text{rot } \vec{u}$ ($= \text{curl } \vec{u} = \nabla \times \vec{u}$) を求めよ。

問3. [複素平面上の写像]

複素平面上で、中心が $(1, 0)$ 、半径1の円の上の1点を z とする。この z が原点をのぞくこの円周上を動くとき、 $w = 1/z$ という関係で結びついた w は複素平面上でどのような図形を描くか？

問4. [場合の数]

神社の前に n 個の段からなる石段がある。ここにキツネがやってきて、石段を一番上まで登る。キツネは一度に1段、または1段飛ばして2段一度に石段を登ることができる。例えば石段が3段($n=3$)の時には、

- (1) 1段ずつ3回登る、
- (2) 最初に2段一気に、あと1段登る、
- (3) 最初に1段、つぎに2段一気に登る、

という3通りの登り方ができる。では、石段が8段($n=8$)のときには、キツネが石段を一番上まで登り切るのに何通りの登り方ができるか？

問5. [確率・期待値]

長さ1mの棒(ぼう)がある. この棒の上に1点を選び, 2本の棒に切断して, この2本の棒の長さを縦・横の長さとする長方形を作るとき, 長方形の面積 S の期待値を求めよ.

ただし, 棒の上に1点を選ぶとき, どの点を選ぶかは全く一様確率であるとする.

問6. [統計判断]

さいころを36回投げたところ, 1の目が12回出た. このさいころは

仮説A: とくに1の目が出やすく作られている.

といえるか? 危険率5%で検定せよ.

ただし, 必要ならば次にかかげる正規分布表を用いよ. 正規分布表とは, 関数

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$$

において, x に対する y の値を与える表である.

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5
y	0.5	0.6915	0.8413	0.9332	0.9773	0.9938	0.9986	0.9998

数 学

[第2問]

3行3列の行列 A に対し、次の関係を満たす実数 λ とゼロベクトルでない3次元列ベクトル p_1, p_2, p_3 が存在するとする.

$$(A - \lambda E) p_3 = p_2$$

$$(A - \lambda E)^2 p_3 = p_1$$

$$(A - \lambda E)^3 p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ただし E は単位行列である.

(1) λ と p_1 は行列 A の固有値と固有ベクトルであることを示せ.

(2) p_1 と p_2 の関係を求めよ.

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対し、上記の関係を満たす実数 λ を求め、3次元列ベクトル

p_1, p_2, p_3 の例をあげよ.

(4) (3)で求めた p_1, p_2, p_3 を並べてできる行列を $P = (p_1, p_2, p_3)$ とする. P の逆行列 P^{-1} および $B = P^{-1} A P$ を求めよ.

数 学

【第3問】

次の弦振動（偏微分）方程式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (\text{a})$$

について、以下の設問に答えよ。ここで、 y は独立変数 (x, t) の関数である。

(1) 次の式(b)が方程式(a)の解であることを示せ。

$$y(x, t) = F(2x + 5t) + G(2x - 5t) \quad (\text{b})$$

ただし、 F は変数 $(2x+5t)$ の、 G は変数 $(2x-5t)$ のそれぞれ2階連続微分可能な任意の関数である。

(2) 以下の境界条件および初期条件のもとで、方程式(a)の特解を求めよ。

$$\begin{cases} y(0, t) = 0 \\ y(\pi, t) = 0 \\ y(x, 0) = \sin 2x \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (\text{c})$$