平成15年度大学院理学系研究科地球惑星科学専攻
修士課程入学試験問題（一般教育科目）

数　　　学

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で3問ある。3問のすべてに解答せよ。
4. 答案用紙は、各問につき1枚、合計3枚であるから、確実に配布されていることを確かめること。
5. 各答案用紙の所定欄に、科目名・問題番号・受験番号及び氏名を必ず記入すること。
6. 解答は、各問ごとに所定の答案用紙を使用すること。
7. 答案用紙は点線より切り取られるから、裏面も使用する場合には、点線の上部を使用しないこと。
8. 答案用紙には、解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名・問題番号・受験番号及び氏名を記入して提出すること。
10. 答案用紙を草稿用紙に絶対使用しないこと（草稿用紙は問題より後のページにある。）

数学

【第1問】

n 個の変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の多項式のうち，変数の順序を変えても同じ式になるものを対称式という．また，k 番目の基本対称式 Π_k を，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ から k 個の変数を取り出して積を作り，それらの総和を取って以下のように定義する．

$$
\begin{aligned}
\Pi_1 &= \sum_{1 \le i \le n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\
\Pi_2 &= \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n \\
\vdots & \qquad \vdots \\
\Pi_n &= \prod_{1 \le i \le n} x_i = x_1 x_2 \cdots x_n
\end{aligned}
$$

(1) 次の対称式を x, y, z の基本対称式の多項式として表せ．

a) $x^2 + y^2 + z^2$

b) $x^3 + y^3 + z^3$

(2) $x^3 + 3x^2 - 5x + 4 = 0$ の解を α, β, γ とするとき，以下の問いに答えよ．

a) $\alpha + \beta + \gamma$，$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$，$\alpha\beta\gamma$ の値を求めよ．

b) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$，$\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2$，$\alpha^2\beta^2\gamma^2$ の値を求めよ．

c) α^2，β^2，γ^2 を解とする三次方程式を作れ．

数 学

【第２問】

連立の常微分方程式

$$\frac{dy_1}{dx} = 2y_1 + 3y_2,\ \ \frac{dy_2}{dx} = -y_1 - 2y_2$$

をベクトル $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ を用いて $\dfrac{d\boldsymbol{y}}{dx} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ と表したとき，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_1，λ_2 （$\lambda_1 < \lambda_2$）を求め，それぞれに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{d}_1 = \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{21} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{d}_2 = \begin{pmatrix} d_{12} \\ d_{22} \end{pmatrix}$ を求めよ．ただし $d_{21} = d_{22} = 1$ とする．

(2) 固有値 λ_1，λ_2 を対角要素とする対角行列 $\boldsymbol{L}$ と，$d_{11}, d_{12}, d_{21}, d_{22}$ を要素とする行列 $\boldsymbol{D}$ について，$\boldsymbol{DLD}^{-1} = \boldsymbol{A}$ が成り立つことを実際に計算して示せ．

(3) $\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ とするとき (2) の関係を用いて，$\dfrac{d\boldsymbol{y}}{dx} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{y}$ を z_1 あるいは z_2 だけを含むふたつの独立な常微分方程式に書き換えよ．

(4) 得られたふたつの常微分方程式を，$x = 0$ のとき $y_1 = 2$，$y_2 = 0$ であるという初期条件のもとに解いて，任意の x に対する y_1，y_2 の表現を求めよ．

数 学

【第３問】

何本かの「あたり」が入っている10本のくじを，順番に引いていくことを考える．くじはすべて同じ確率で引かれるものとする．

(1) 「あたり」が２本入っていると仮定する．

a) ２人目までに「あたり」がすべて出てしまう確率を求めよ．

b) ４人目までに「あたり」がすべて出てしまう確率を求めよ．

c) ４人目までに「あたり」がまったく出ない確率を求めよ．

(2) 実はくじを準備した人が「あたり」を何本入れたか忘れてしまった．彼が「あたり」を０本，１本，２本入れた確率を皆等しく $\frac{1}{3}$ だとする．

a) ４人目までに「あたり」がまったく出ない確率を求めよ．

b) 実際にくじを引いたところ，４人続けて「あたり」が出なかったとせよ．その場合，くじを準備した人が「あたり」を入れなかった条件付き確率を求めよ．

なお，事象 A が起きる確率を $P(A)$，事象 A が起きたときに事象 B も起きる条件付き確率を $P(B|A)$ と書くと，$P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$ が成り立つ．また，事象 F_1，F_2，$\cdots$，F_n が互いに排反で $P(F_1) + P(F_2) + \cdots + P(F_n) = 1$ のとき，$P(A) = P(A|F_1)P(F_1) + P(A|F_2)P(F_2) + \cdots + P(A|F_n)P(F_n)$ になることに注意せよ．