

平成 15 年度大学院理学系研究科地球惑星科学専攻
修士課程入学試験問題（一般教育科目）

数 学

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で 3 問ある。3 問のすべてに解答せよ。
4. 答案用紙は、各問につき 1 枚、合計 3 枚であるから、確実に配布されていることを確かめること。
5. 各答案用紙の所定欄に、科目名・問題番号・受験番号及び氏名を必ず記入すること。
6. 解答は、各問ごとに所定の答案用紙を使用すること。
7. 答案用紙は点線より切り取られるから、裏面も使用する場合には、点線の上部を使用しないこと。
8. 答案用紙には、解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名・問題番号・受験番号及び氏名を記入して提出すること。
10. 答案用紙を草稿用紙に絶対使用しないこと（草稿用紙は問題より後のページにある。）

数学

【第1問】

n 個の変数 x_1, x_2, \dots, x_n の多項式のうち、変数の順序を変えても同じ式になるものを対称式という。また、 k 番目の基本対称式 Π_k を、 x_1, x_2, \dots, x_n から k 個の変数を取り出して積を作り、それらの総和を取って以下のように定義する。

$$\Pi_1 = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$$\Pi_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n$$

$$\vdots$$

$$\Pi_n = \prod_{1 \leq i \leq n} x_i = x_1 x_2 \dots x_n$$

(1) 次の対称式を x, y, z の基本対称式の多項式として表せ。

a) $x^2 + y^2 + z^2$

b) $x^3 + y^3 + z^3$

(2) $x^3 + 3x^2 - 5x + 4 = 0$ の解を α, β, γ とするとき、以下の問いに答えよ。

a) $\alpha + \beta + \gamma, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha, \alpha\beta\gamma$ の値を求めよ。

b) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2, \alpha^2\beta^2\gamma^2$ の値を求めよ。

c) $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ を解とする三次方程式を作れ。

数学

【第2問】

連立の常微分方程式

$$\frac{dy_1}{dx} = 2y_1 + 3y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} = -y_1 - 2y_2$$

をベクトル $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ を用いて $\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ と表したとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 行列 \mathbf{A} の固有値 λ_1, λ_2 ($\lambda_1 < \lambda_2$) を求め、それぞれに対応する固有ベクトル $\mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{21} \end{pmatrix}$, $\mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} d_{12} \\ d_{22} \end{pmatrix}$ を求めよ。ただし $d_{21} = d_{22} = 1$ とする。
- (2) 固有値 λ_1, λ_2 を対角要素とする対角行列 \mathbf{L} と、 $d_{11}, d_{12}, d_{21}, d_{22}$ を要素とする行列 \mathbf{D} について、 $\mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{A}$ が成り立つことを実際に計算して示せ。
- (3) $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ とするとき (2) の関係を用いて、 $\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ を z_1 あるいは z_2 だけを含むふたつの独立な常微分方程式に書き換えよ。
- (4) 得られたふたつの常微分方程式を、 $x = 0$ のとき $y_1 = 2, y_2 = 0$ であるという初期条件のもとに解いて、任意の x に対する y_1, y_2 の表現を求めよ。

数学

【第3問】

何本かの「あたり」が入っている10本のくじを、順番に引いていくことを考える。くじはすべて同じ確率で引かれるものとする。

- (1) 「あたり」が2本入っていると仮定する。
 - a) 2人目までに「あたり」がすべて出てしまう確率を求めよ。
 - b) 4人目までに「あたり」がすべて出てしまう確率を求めよ。
 - c) 4人目までに「あたり」がまったく出ない確率を求めよ。
- (2) 実にくじを準備した人が「あたり」を何本入れたか忘れてしまった。彼が「あたり」を0本, 1本, 2本入れた確率を皆等しく $\frac{1}{3}$ だとする。
 - a) 4人目までに「あたり」がまったく出ない確率を求めよ。
 - b) 実際にくじを引いたところ, 4人続けて「あたり」が出なかったとせよ。その場合, くじを準備した人が「あたり」を入れなかった条件付き確率を求めよ。

なお, 事象 A が起きる確率を $P(A)$, 事象 A が起きたときに事象 B も起きる条件付き確率を $P(B|A)$ と書くと, $P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$ が成り立つ。また, 事象 F_1, F_2, \dots, F_n が互いに排反で $P(F_1) + P(F_2) + \dots + P(F_n) = 1$ のとき, $P(A) = P(A|F_1)P(F_1) + P(A|F_2)P(F_2) + \dots + P(A|F_n)P(F_n)$ になることに注意せよ。