平成 14 年度大学院理学系研究科地球惑星科学専攻
修士課程入学試験問題（一般教育科目）

数　　　学

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で 3 問ある。3 問のすべてに解答せよ。
4. 答案用紙は、各問につき 1 枚、合計 3 枚であるから、確実に配布されていることを確かめること。
5. 各答案用紙の所定欄に、科目名・問題番号・受験番号及び氏名を必ず記入すること。
6. 解答は、各問ごとに所定の答案用紙を使用すること。
7. 答案用紙は点線より切り取られるから、裏面も使用する場合には、点線の上部を使用しないこと。
8. 答案用紙には、解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名・問題番号・受験番号及び氏名を記入して提出すること。
10. 答案用紙を草稿用紙に絶対使用しないこと（草稿用紙は問題より後のページにある。）

数 学

問題1

nは2以上の整数、Rは正の実数、iを虚数単位とし、以下の問に答えよ。

問 1.

$0 \leq \varphi \leq \pi/2$ において

$$\sin\varphi \geq 2\varphi/\pi$$

であることを示せ。

問 2.

$0 \leq \theta \leq \pi/(2n)$ において

$$|\exp\{iR^n \exp(in\theta)\}| \leq \exp\{-R^n 2n\theta/\pi\}$$

であることを示せ。

問 3.

実定積分

$$\int_0^{+\infty} \exp(-x^n)\ dx$$

を A_n とおく。このとき、複素定積分

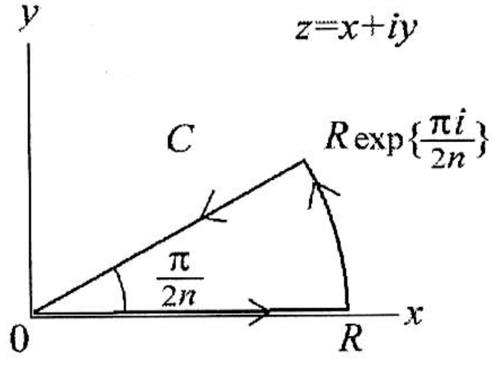
$$I_n = \int_0^{+\infty} \exp(ix^n)\ dx$$

は A_n を用いて

$$I_n = \exp\left(\frac{\pi i}{2n}\right)\ A_n$$

と表されることを示せ。

ヒント: 下図の積分路 C に沿った複素積分 $\int_C \exp\{iz^n\}dz$ を考え、問2の結果を用いて $R \to \infty$ の極限を考察せよ。



問題2

階段状関数 f_1、f_2、f_3 、f_4 および D は x の区間 $[0,1)$、$[1,2)$、$[2,3)$、$[3,4]$ で次の値をとる。

f_1: +1、 +1、 +1、 +1
f_2: +1、 +1、 −1、 −1
f_3: +1、 −1、 −1、 +1
f_4: +1、 −1、 +1、 −1

D: +5、 +2、 +1、 +3

このとき、次の問いに答えよ。

問 1.

区間 [0,4] で f_1、f_2、f_3 、f_4 が互いに直交することを示せ。ただし、f_i と f_j の内積 (f_i, f_j) を

$$(f_i, f_j) = \int_0^4 f_i f_j dx$$

と定義する (i、$j = 1$、2、3、4)。

問 2.

関数 $D(x)$ を区間 $[0,4]$ で

$$D = \sum_{i=1}^{4} a_i f_i$$

と表わす場合の定数係数 a_1、a_2、a_3 、a_4 の値を求めよ。

問題3

体積 1 m^3 のプラスチックの立方体の中に N 個の金属球 (半径 R m) がランダムに埋め込まれている。(図1。$N \gg 1$、$R \ll 1$ とする。)

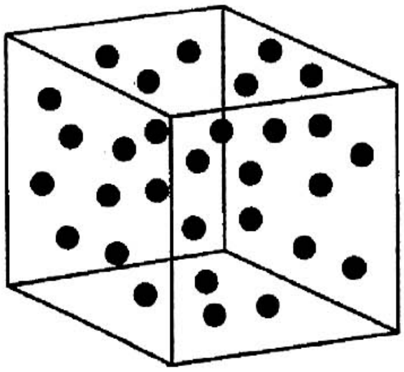


図1. 金属球の埋め込まれた立方体

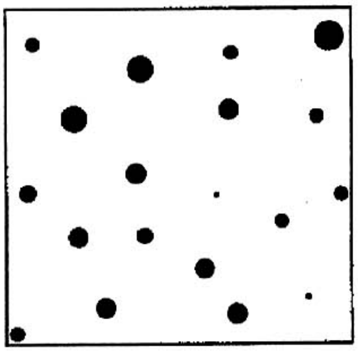


図2. 立方体の切断面

この立方体をどれかの側面に平行な平面で切断するとしよう。(切断の位置は側面からは十分離れているとし、端の効果は考えなくてよい。) 断面に現れる金属球は、その中心からさまざまな距離で切断されるから、さまざまな半径 (a m としよう。$0 \leq a \leq R$ である) の円となるであろう (図2)。

さて、切断を多数回繰り返し、断面に現れる円の総数 (n 個としよう) とそれらの半径を毎回記録した。繰り返しを終えてからその記録を整理してさまざまな統計処理を行った。処理結果を解釈するためには理論的な考察が必要であるが、それに関して次の問いに答えよ。

問 1.

断面に現れる円の半径の平均値 $\bar{a}$ は理想的にはいくらになるべきか? R を用いて表せ。

問 2.

断面に現れる円の総数 n の平均値 $\bar{n}$ は理想的にはいくらになるべきか? N と R を用いて表せ。ただし、金属球の平均的間隔は R に比べ十分大きいとする。

問 3.

各回の切断における円の総数 n は確率的に変動し、n の確率分布 $P(n=k)$ は ν をパラメタとして含むポアソン分布

$$P(n=k) = \frac{\nu^k}{k!}\exp(-\nu) \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

に従う事が見いだされた。この分布の平均値、分散はともに ν で与えられる事を示せ。